微积分上重难点分析与

如何学好微积分、如何复习好考研高数

一 微积分上重难点分析

1 第一章 函数极限与连续、

第一节 函数

中学数学是大学数学基石。

微积分是以函数为研究对象，运用无穷小与无穷逼近等研究函数的变化状态

和变量间的依赖关系的一门学科

(1) 中学学过的数学内容过一段时间要复习一下，主要是公式与方法

(2) 把删去的中学内容统统补充回来

反三角函数、$\cot x$, $\sec x$, $\csc x$

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$, $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

参数方程、极坐标系与极坐标.

参考资料 ① 高等数学先修课 MOOC

② 苏德矿 童乃站上《高等数学基础》

视频

第二节 数列极限

数列极限是微积分中最重要、最难、最核心、最基本。极限的思想贯穿微积分中。

例 $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$

解法一 原式 $=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

$=0$ ×

错误 = 原式 $= 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1$ ×

~~错误 = 原式 = (1-1+1) + …~~

正确做法

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}\right)$

$$\left(= \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1, & n = 2k \\ \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0, & n = 2k+1 \end{cases} \right)$$

不存在.

设 $\{a_n\}$ 是一个给定数列，a 是一个确定的常数，当 n 无限增大时，a_n 与 a 无限地接近，称数列 $\{a_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时极限是 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

或 $a_n \to a \ (n\to\infty)$

a_n 与 a 无限地接近，即 $\forall \varepsilon > 0$

要 $|a_n - a| < \varepsilon$，要找到正整数 N，

当 $n > N$ 时，都有 $|a_n - a| < \varepsilon$

定义 设 $\{a_n\}$ 是一个给定的数列，a 是一个确定的常数。若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N（或 $N\in N_+$），当 $n>N$ 时，都有 $|a_n-a|<\varepsilon$，称数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋于无穷大时极限是 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \text{ 或 } a_n\to a\ (n\to\infty)$$

称 $\varepsilon-N$ 定义。

用 $\varepsilon-N$ 定义证 $\lim a_n = a$.

$\{a_n\}$是一个给定数列. a_n是已知的

a是一个确定常数. 已知的.

$\forall \varepsilon>0$. 给过以后 ε 看成一个定值

$|a_n-a|<\varepsilon$ 已知的.

对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N \in N_+$ 当 $n>N$ 时

?　　　　求解? 未知

都有 $|a_n-a|<\varepsilon$

已知

需要寻找由果索因. 逆向思考

$\forall \varepsilon > 0$，若要 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

只要 $\Leftarrow$ $n > N$ 成立.
$\not\Rightarrow$?

（要证 B 成立，只要 A 成立

指 $A \Rightarrow B$

A 成立是 B 成立的充分条件）

用定义证明数列极限有两种方法

1. 直接证法

$\forall \varepsilon > 0$. 若要 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立

$\Leftrightarrow\ n > N$

例 证明 $\sqrt[n]{a} = 1$ （$0<a<1$ 常数）

证 $\forall\, \overset{0<\varepsilon<1}{\cancel{\varepsilon>0}}$，若要 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立

$\Leftrightarrow 1-\sqrt[n]{a} < \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon < a^{\frac{1}{n}}$

$\Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon) < \frac{1}{n}\ln a \Leftrightarrow n\ln(1-\varepsilon) < \ln a$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$，取 $N=\max\{[\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}], 1\}$

当 $n>N$ 时，都有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$

2 间接证法（适当放大法）

有时 $\forall \varepsilon>0$. 从 $|a_n-a|<\varepsilon$ 中

不容易找到充要条件 $n>N$，这时.

$\forall \varepsilon>0$，由 $|a_n-a|\le g(n)$ $(n>N_1)$ (1)

((1) $g(n)$ 尽量简单，(2) $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)=0$)

要使 $g(n)<\varepsilon \Leftrightarrow n>N_2$ (2)

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 当 $n>N$ 时

都有 $|a_n-a|\le g(n)<\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时

都有

$0 \le |a_n - a| \le g(n) < \varepsilon$

$|g(n)| < \varepsilon$

$|g(n) - 0| < \varepsilon$

即 $\lim_{n\to\infty} g(n) = 0$

例 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^{50}} = 0$

证 $\forall \varepsilon>0$，若要 $\left|\dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^{50}} - 0\right| < \varepsilon$ 成立

由 $\left|\dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^{50}} - 0\right| = \dfrac{n^2 |\sin n!|}{(n+1)^{50}}$

$\le \dfrac{n^2}{(n+1)^{50}} \le \dfrac{n^2}{n^{50}} = \dfrac{1}{n^{48}} = \dfrac{1}{n^{47}} \cdot \dfrac{1}{n}$

$\le \dfrac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$

只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ 成立 $\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，都有

$\left|\dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^{50}} - 0\right| < \varepsilon$. 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \sin n!}{(n+1)^{50}} = 0$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明时候用间接放大. 用

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$$

称二项展开式

同理 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a>1$时)

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a>0$时)

数列极限的5个性质，一个推论重要这个思想掌握了。函数极限有6种形式，每一种都有5个性质，一个推论共36个性质，你就明白，不用背就能叙述出来。

判断数列收敛的两个准则

1. 夹逼定理， 2 单调有界定理

重要，灵活。

数列与子数列的关系.

这是为了判断数列发散. 为后面函数极限一个重要定理一归结原则(或海涅定理)做准备. 这个定理证明很灵活. 可能想不到. 证明也很难.

里面用到反证法.

第三节 函数极限 六种 重要. 等价量替换

十九个重要函数极限要记住

第四节 函数的连续.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 重要

闭区间$[a,b]$上连续函数有三个重要的定理：最大值与最小值定理、根的存在定理、介值定理

第二章 导数与微分

求基本初等函数导数时看到重要函数的作用

记住基本初等函数、导数的四则运算、理解并掌握复合函数的求导法则 重要

微分与导数等价，只不过不同形式，
有不同的用处

微分为了不定积分做准备。

微分里会出现微元法的思想。

第三章 中值定理（难）与导数应用

这里面定理条件、结论要记住，要
会证明。

费马定理、罗尔定理、拉格朗日定理、
泰勒公式（最难）

利用带有皮亚诺余项的麦克劳林公式求极限，很多同学这个方法掌握

今有会证明题：

(1) 证明方程根的存在性.

(2) 证明含ξ，η等的等式

(3) 证明各种不等式

应用是常规

求极限的洛必达法则.

第四章 不定积分

不定积分是求导的逆运算、难。

以后要记住大约二十五个不定积分公式

不定积分线性运算法则、凑微分、变量代换、分部积分（灵活）

有理函数的不定积分、无理函数的不定积分、三角函数有理式的不定积分过程麻烦，这些方法要知道，能不用尽量不用，实在没办法，只有用。练大量题目。

第五章 定积分及应用

定积分定义是用极限给出

牛顿—莱布尼茨公式

若 $F'(x)=f(x)$　　$\int f(x)dx = F(x)+C$

则 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

定积分还有独特计算法，有四大法宝

定积分线性运算、凑微分、变量代换

分部积分等。灵活

二 如何学好微积分.

1.课前预习, 2.有目的听课, 3.有针对性记笔记. 4.课后整理笔记.

5.做作业.

作业题. 老师讲的例题. 书中例题.

是期中、期末考试基本题.

6.做一些历年的期中、期末考卷.

7.做一些历年带有积分的考研试题.

8. 《高等数学学习辅导讲义》
蔡燧林等编，浙大出版社

9. 《吉米多维奇习题集选解精讲》
山东大学 张天德.

10 信成实 微积分的指导书

11 数学分析习题指导书

12. 到中国大学MOOC上，很多学校开了高等数学习题课 或 高等数学竞赛选讲

三 如何复习考研高数

考研数学：1. 高数（微积分、常微）

2. 线代、3、概率论与数理统计.

1. 基础阶段（书上内容搞懂、书中例题要掌握、书后习题要掌握）

2. 强化阶段：买一本考研指导书

大约三、四个月

3. 巩固阶段. 做历年考研试题.
87年开始统考，到现在36年.
再做一些考研指导书后面的习题
(带有解答)、考研习题集

三个月左右.

4. 冲刺阶段
继续做题. 做大约的十份
左右的模拟卷，对于没有掌握
补漏补缺.
一个月左右.