内容简介

本书汇集了“数学分析”方面的问题和反例500多个。全书共八章，内容有数列、函数微分、积分、级数、一致收敛、多元函数、重积分与参变量积分。每一章分为三部分：第一部分提纲挈领地给出了该章的基本概念和主要结果；第二部分是问题，包括解法；第三部分是反例。

本书所选的问题和反例比较典型，难度适中，构思新颖，解法精巧，富有启发性。书中不少问题和反例直接选自国内外有关学者所做的工作。本书对正确理解“数学分析”的基本概念，掌握“数学分析”的基本理论和技巧很有好处。

本书可供大学、大专数学系师生、数学工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的问题和反例 / 汪林编著 . -- 北京：高等教育出版社，2015. 10
（现代数学基础）
ISBN 978-7-04-043913-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①汪… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 237771 号

策划编辑 赵天夫　责任编辑 赵天夫　封面设计 赵　阳　版式设计 张　杰
责任校对 高　歌　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 山东鸿君杰文化发展有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 24.5
字　　数 510 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年10月第1版
印　　次 2015年10月第1次印刷
定　　价 49.00 元

物 料 号 43913-00

目　　录

第一章　数列 **1**

基本概念和主要结果 1

问题 5

反例 35

第二章　函数 **41**

基本概念和主要结果 41

问题 44

反例 74

第三章　微分 **103**

基本概念和主要结果 103

问题 105

反例 132

第四章　积分 **149**

基本概念和主要结果 149

问题 153

反例 198

第五章　级数 **215**

基本概念和主要结果 215

问题 217

反例 237

第六章　一致收敛 **255**

基本概念和主要结果 255

问题 256

反例 283

第七章　多元函数 **301**

基本概念和主要结果 301

问题 304

反例 315

第八章　重积分与参变量积分 **337**

基本概念和主要结果 337

问题 341

反例 361

参考文献 **377**

前　　言

本书汇集了 “数学分析” 方面的问题和反例 500 多个. 全书共八章, 内容有数列、函数、微分、积分、级数、一致收敛、多元函数、重积分与参变量积分. 每一章分为三部分: 第一部分提纲挈领地给出了该章的基本概念和主要结果; 第二部分是问题, 包括解法; 第三部分是反例.

本书所选的问题和反例比较典型, 难度适中, 构思新颖, 解法精巧, 富有启发性. 书中不少问题和反例直接选自国内外有关学者所做的工作. 本书对正确理解 “数学分析” 的基本概念, 掌握 “数学分析” 的基本理论和技巧很有好处.

本书可供大学、大专数学系师生、数学工作者参考.

由于编者水平所限, 因此一定有很多不当或错误之处, 敬请读者批评指正.

汪　林

2015 年 1 月于昆明

第一章　数　　列

基本概念和主要结果

为了本章及后面各章的需要, 我们把有关集合论的一些基础知识陈述如下:

设 A 是某些对象的任一集合 (简称集), 若 a 是 A 的元素 (简称元), 则记为 $a \in A$. 若 a 不是 A 的元, 则记为 $a \notin A$. 设 $p(x)$ 是某一与 x 有关的条件, 所有符合这个条件的事物 x 所组成之集, 用 $\{x : p(x)\}$ 来表示. 不含任何元的集称为**空集**, 用 $\emptyset$ 来表示. 若集 A 的一切元都是集 B 的元, 则称 A 是 B 的**子集**, 或称 A **包含于** B, 也叫作 B **包含** A, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 并且 $B \subset A$, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.

设 A, B 是两个集, 由集 A 同集 B 的一切元所组成之集称为 A 与 B 的**并** (或**并集**), 记作 $A \cup B$. 所有既属于 A 又属于 B 的元组成之集称为 A 与 B 之**交** (或**交集**), 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B **不相交**.

自然, 并与交的定义可以推广到一般的情形:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{ 有 } \alpha \in I \text{ 使 } x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{ 对一切 } \alpha \in I \text{ 有 } x \in A_\alpha\},$$

其中 α 是集的指标, 它在某个固定的指标集 I 中变化.

由集 A 中不属于 B 的那些元的全体所组成之集称为 A 与 B 之**差**, 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 $S \supset B$, 则称差 $S \setminus B$ 为 B **关于**S **的补集**. 若包含集 S 已经清楚地指明或由上下文能够理解时, 就简称 $S \setminus B$ 为 B **的补集**.

设 A 与 B 都是非空集, 一切可能的有序偶 (a,b)(其中 $a\in A, b\in B$) 所组成之集称为 A 与 B 的**直积**, 记为 $A\times B$. 类似于两个集的直积, 可以定义任意多个集的直积.

设 A,B 是两个非空集. 若依一定的法则 f, 对每个 $x\in A$, 在 B 中有一个确定的元 y 与之对应, 则称 f 是定义在 A 上而在 B 中取值的**映射** (通常称数集到数集的映射为**函数**), 记成 $f:A\to B$, 并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$. 我们称 A 为 f 的**定义域**, 称 $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ 为 f 的**值域**.

设给定映射 $f:A\to B$ 而 $B=f(A)$, 则称 f 是由 A 到 B 上的**满射**. 如果对每个 $y\in B$, 仅有唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则说 f 有**逆映射**f^{-1} (若 A,B 为数集, 则通常称 f^{-1} 为 f 的**反函数**). 当映射 $f:A\to B$ 有逆映射时, 就称 f 是**一一映射**, 并称 A 与 B 成**一一对应**. 当集 A 与 B 成一一对应时, 称它们互相**对等**. 我们把互相对等的集归于同一类, 不对等的集不属于同一类, 对这样的每类集予以一个记号, 称这个记号为这一类集中每个集的**势**或**基数**. 集 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$. 于是, 相互对等的集 A,B, 就具有相同的势, 即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

若集 A 与 B 不对等, 但集 B 对等于集 A 的某个子集, 则称 A 的势**大于**B 的势, 或 B 的势**小于**A 的势, 记为 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$, 或 $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$.

我们用 N 代表正整数的全体, 若集 A 对等于 N, 则称 A 为**可数集**或**可列集**. 此时, 记 $\overline{\overline{A}}=\aleph$, 读作 “阿列夫零”. 可以证明, 任何区间中的一切有理数所成之集是可数集; 任何区间中的一切代数数所成之集也是可数的.

若集 A 的势大于可数集的势, 则称它为**不可数集**或**不可列集**. 例如, 区间 $[0,1]$ 为不可数集. 对等于区间 $[0,1]$ 的任何集称为具有**连续统的势**的集. 若集 A 具有连续统的势, 则记为 $\overline{\overline{A}}=\aleph$, 读作 “阿列夫”.

本书主要涉及 n 维欧氏空间 R^n 的子集, 前六章主要涉及 R^1 的子集.

任取 $a\in R^1$, 称含有 a 的任一开区间为 a 的一个**开邻域** (简称**邻域**). 设 $E\subset R^1, a\in E$, 若存在 a 的某个邻域 (α,β), 使得 $(\alpha,\beta)\subset E$, 则称 a 为 E 的**内点**.E 的一切内点所成之集叫作 E 的**内域**, 记为 E°. 若 $E=E^\circ$, 则称 E 为 R^1 中的开集.

设 $E\subset R^1, a\in R^1$. 若 a 的任一邻域均含有 E 的无穷多个点, 则称 a 为 E 的**聚点**. E 的一切聚点所成之集称为 E 的**导集**, 记成 E'. 称 $E\cup E'$ 为 E 的**闭包**, 记为 $\overline{E}$.E 的导集 E' 的一切聚点所成之集称为 E 的**二阶导集**, 并记为 E''. 高阶导集可以类似地定义. 称 $E\backslash E'$ 中的点为 E 的**孤立点**. 若 $E'\subset E$, 则称 E 为**闭集**. 若 $E=E'$, 则称 E 为**完备集**.

集 E 叫作有**上界** (**下界**) 的, 是指存在常数 $M(m)$, 使对一切 $x\in E$ 有 $x\leqslant M(x\geqslant m)$. E 的最小上界 (最大下界) 称为 E 的**上确界** (**下确界**), 记作

$$\sup E(\inf E).$$

既有上界又有下界的集称为**有界集**.

Weierstrass **聚点原理** 有界无穷集必有聚点.

若集 E 的闭包包含集 A, 则称 E 在 A 中**稠密**. 特别, 若集 E 在空间 R^1 中稠密, 则称它在 R^1 中**处处稠密**. 若集 E 的闭包不包含任何非空开集, 则称它在 R^1 中**无处稠密**或为**疏集**.

一个集叫作**第一纲集**, 是指它可表成可数个疏集的并集; 不是第一纲的集, 就称它为**第二纲集**.

直线上的任何非空开集 G 可表成 (并且是唯一的方法) 有限个或可数个两两不相交的开区间的并. 这些开区间称为 G 的**构成区间**. 直线上的任何非空闭集 F 是由整个数轴去掉有限个或可数个两两不相交的开区间而得到, 这些开区间称为 F 的**邻接区间**.

可表成可数个开集之交的任意集称为 G_δ **集**; 可表成可数个闭集之并的任意集称为 F_σ **集**.

所谓集 E 的一个**开覆盖**, 是指这样的一组开集 $\{G\alpha\}$, 这组开集的并集包含 E. 这时, 又称 $\{G\alpha\}$ 覆盖 E.

集 E 叫作**紧**的, 是指 E 的每个开覆盖含有它的有限子覆盖.

Heiene-Borel **有限覆盖定理**　有界闭集的任何开覆盖必有有限子覆盖.

所谓实数集 D 的一个 Dedekind **分割**, 就是将 D 中的元素分成两个子集 X 和 Y, 且满足下列条件:

(i) X 与 Y 都不空;

(ii) $X \cap Y = \emptyset$;

(iii) 每一个属于 X 的元小于 Y 中的所有的元. 称 X 为 D 的**前段**, Y 为 D 的**后段**, 且将 D 的分割记为 (X, Y).

Dedekind **分割原理**　全体实数 R^1 的任何一个分割 (X, Y), 只能要么 X 有最大数, Y 无最小数; 要么 X 无最大数, Y 有最小数. 即对 R^1 的任何一个分割 (X, Y), 必存在唯一的实数 $\alpha \in R^1$, 使对任意的 $x \in X, y \in Y$ 有

$$x \leqslant \alpha < y \quad \text{或} \quad x < \alpha \leqslant y.$$

R^1 的子集 E 称为**零测度集**, 如果 E 能够包含于有限个或可数个开区间之内, 而这些开区间的总长度可以任意小. 由这个定义立即推知, 零测度集的任何子集也是一个零测度集. 有限个或可数个零测度集的并也是一个零测度集; 特别, R^1 中任何有限集或可数集都是零测度集.

设有一个关于集 E 上的点 x 的命题 $p(x)$. 如果有 E 的零测度子集 A, 使 $p(x)$ 在 $E \backslash A$ 上恒成立, 则称 $p(x)$ 在 E 上**几乎处处成立**.

有关集和测度的进一步材料, 读者可参看 [4],[12] 或 [18].

我们再简要地介绍有关数列的一些基本概念和性质如下:

所谓**实数列** (简称**数列**), 是指定义在正整数集 N 上的函数 f. 若对 $n \in N$, 有 $f(n) = x_n$, 习惯上以符号 $\{x_n\}$ 表示数列 f, 有时也表示为 $x_1, x_2, \cdots$. f 的值 x_n 叫作

数列的**项**.

数列 $\{x_n\}$ 称以 x 为**极限**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in N$, 使当 $n > n_0$ 时

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

这时称 $\{x_n\}$ **收敛于** x, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad 或 \quad x_n \to x \quad (n \to \infty).$$

若 $\{x_n\}$ 不是收敛的, 则说它是**发散**的.

数列的极限运算满足算术运算法则.

极限的比较法则 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c$, 又

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

数列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy **数列**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in N$, 使 $m, n > n_0$ 时

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Cauchy **收敛准则** 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 数列.

x 称为数列 $\{x_n\}$ 的**极限点**, 是指存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

值域有界的数列叫作**有界数列**.

Bolzano-Weierstrass **定理** 有界数列必有收敛子列.

数列 $\{x_n\}$ 叫作**单调增加** (或**递增**) 的, 若对 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $x_n \leqslant x_{n+1}$; 叫作**单调减少** (或**递减**) 的, 若对 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $x_n \geqslant x_{n+1}$. 单调增加数列和单调减少数列统称为**单调数列**.

单调有界原理 递增 (递减) 有上界 (下界) 的数列必定收敛.

Cantor **区间套定理** 设 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是一列闭区间. 又设

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$,

则存在唯一数 $x_0 \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

设 $\{x_n\}$ 是一数列, $a_n = \sup_{k\geqslant n}\{x_k\}(b_n = \inf_{k\geqslant n}\{x_k\})$, 于是 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots (b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots, a_n \geqslant b_n)$. 称 $\lim_{n\to\infty} a_n (\lim_{n\to\infty} b_n)$ 为数列 $\{x_n\}$ 的**上** (**下**) **极限**, 记为 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n (\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n)$.

显然, $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在当且仅当 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ 与 $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ 存在且相等; 此时

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

问　题

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数. 证明

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{1}$$

这是著名的 n 个正数的算术平均值不小于几何平均值. 这个不等式有着广泛的应用, 我们给出三种证明, 它们分别属于 Diananda[38], Kong-Ming Chong[55] 和 Akerberg[21].

证法 1　令

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$
$$G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 全为正数.

对 $n=2, A_2 \geqslant G_2$ 显然成立.

设 $n=m$ 成立, 则 $A_m \geqslant G_m$. 于是,

$$\begin{aligned} A = \frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m} &\geqslant (a_{m+1}A_{m+1}^{m-1})^{\frac{1}{m}} \\ &= G. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} A_{m+1} = \frac{A_m+A}{2} &\geqslant (A_mA)^{\frac{1}{2}} \geqslant (G_mG)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G_{m+1}^{m+1} \quad A_{m+1}^{m-1})^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

从而 $A_{m+1} \geqslant G_{m+1}$, 故 (1) 成立.

证法 2　显然, (1) 中等号成立, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. 令

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 且 $a_1 < a_n$, 则显然有

$$a_1 < A_n < a_n.$$

因而

$$A_n(a_1+a_n-A_n) - a_1a_n = (a_1-A_n)(A_n-a_n) > 0. \tag{2}$$

$n=2$ 时不等式 (1) 显然成立.

设 $n-1$ 时 (1) 成立.

由于 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ 和 $a_1+a_n-A_n$ 的算术平均值是 A_n, 即

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_1+a_n-A_n}{n-1}=A_n,$$

故由归纳法假设得

$$A_n^{n-1} \geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1} \quad (a_1+a_n-A_n).$$

由 (2) 得

$$\begin{aligned} A_n^n &\geqslant A_n(a_1+a_n-A_n)a_2a_3\cdots a_{n-1} \\ &\geqslant a_1a_na_2a_3\cdots a_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

证法 3 设 α 为一正数, n 是大于 1 的正整数. 容易验证

$$(\alpha-1)[n-(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})] \leqslant 0,$$

或

$$\alpha(n-\alpha^{n-1}) \leqslant n-1, \tag{3}$$

且不等式除 $\alpha=1$ 外是严格的. 令

$$\alpha=\left(\frac{a_1}{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

则由 (3) 得到

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqslant a_1\left(\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

逐次应用这一公式, 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n &\geqslant a_1\left(\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\geqslant a_1a_2\left(\frac{a_3+\cdots+a_n}{n-2}\right)^{n-2} \\ &\geqslant \cdots \\ &\geqslant a_1a_2\cdots a_n, \end{aligned}$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

2. 证明 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

证 注意, 对 $x \in R^1$ 皆有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0.$$

令 $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, 于是

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0.$$

不妨设 $A > 0$, 令 $x = -\frac{B}{A}$, 则有

$$B^2 - AC \leqslant 0,$$

此即 Cauchy-Schwarz 不等式.

3. 证明 Minkowski 不等式:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 注意

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

此即 Minkowski 不等式.

4. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证 因为

$$\begin{aligned}\frac{1+1+\cdots+1}{n} &\leqslant \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\\ &\leqslant \frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n},\end{aligned}$$

所以

$$1 \leqslant \frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

容易证明, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 因此, 由比较法则即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

证 令 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 则有不等式

$$A<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant A\cdot\sqrt[n]{m}.$$

因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

6. 设 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

证 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 故存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$, 因而 $a_n>a_{n+1}$; 又, $a_n>0$, 故数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 因而收敛, 令

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由于 $a_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot a_{n+1}$, 所以当 $n\to\infty$ 时两边取极限, 即得 $a=0$.

7. 设 $x_0=1, x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证 显然, 对任意正整数 n, $\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1$. 其次, 对任意正整数 n,k, 有

$$\begin{aligned}x_{n+1+k}-x_{n+1}&=\frac{1}{1+x_{n+k}}-\frac{1}{1+x_n}\\ &=\frac{x_n-x_{n+k}}{(1+x_{n+k})(1+x_n)},\end{aligned}$$

故

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1+k}-x_{n+1}| &= \frac{|x_{n+k}-x_n|}{(1+x_{n+k})(1+x_n)} \\
&\leqslant \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2}|x_{n+k}-x_n| = \frac{4}{9}|x_{n+k}-x_n| \\
&\leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^2 |x_{n-1+k}-x_{n-1}| \leqslant \cdots \\
&\leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} |x_k - x_0| \leqslant 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

因此, $\{x_n\}$ 为一 Cauchy 数列, 故收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

并在 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$ 的两端取极限, 即得 $a=\frac{\sqrt{5}-2}{2}$.

8. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$, 做出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, 一般地, 令

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \quad 与 \quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

证明 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 皆存在且相等.

证　由题设推知

$$
\begin{aligned}
&a_1 > \frac{a_1+b_1}{2} = a_2 > b_2 = \sqrt{a_1b_1} > b_1, \\
&a_1 > a_2 > \frac{a_2+b_2}{2} = a_3 > b_3 = \sqrt{a_2b_2} > b_2 > b_1,
\end{aligned}
$$

用数学归纳法可证

$$
\begin{aligned}
a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \frac{a_n+b_n}{2} = a_{n+1} \\
> b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} > \cdots > b_2 > b_1.
\end{aligned}
$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界 $b_1, \{b_n\}$ 单调增加且有上界 a_1, 故它们都有极限. 令

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

并在等式 $2a_{n+1}=a_n+b_n$ 的两端取极限, 得 $a=b$.

9. 设 $a>0, b>0, a_1=\frac{a+\frac{b}{a}}{2}$, 一般地, $a_{n+1}=\frac{a_n+\frac{b}{a_n}}{2}$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求出其极限.

证 由题设知 $a_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$. 又,

$$a_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a_n}})^2}{2} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{b} \quad (n=1,2,\cdots),$$

于是,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\frac{b}{a_n} - a_n}{2} \leqslant 0.$$

因此, $\{a_n\}$ 是单调减少的有界数列, 故必收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \geqslant \sqrt{b} > 0,$$

并在等式 $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{b}{a_n}}{2}$ 的两端取极限, 即得 $l = \sqrt{b}$, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}.$$

10. 给定实数 a_0, a_1, 并令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证 因

$$a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \quad \cdots,$$

故

$$\begin{aligned} &a_2 - a_1 = \frac{a_0 - a_1}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2}, \\ &a_4 - a_3 = \frac{a_2 - a_3}{2}, \quad \cdots. \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &a_2 - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{a_1 - a_0}{2^2}, \\ &a_4 - a_3 = -\frac{a_1 - a_0}{2^3}, \quad \cdots, \quad a_n - a_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= -\frac{a_1 - a_0}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ &= \frac{a_1 - a_0}{3}\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right\}, \end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

因此, $\{a_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}.$$

11. 设 $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证　若 $a_1 = \sqrt{3}$, 则 $a_n = \sqrt{3}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}.$$

现在考虑辅助函数

$$f(x) = \frac{3(1+x)}{3+x}.$$

显然有 $a_{n+1} = f(a_n)(n = 1, 2, \cdots)$. f 在 $x > 0$ 处可微, 且

$$f'(x) = \frac{6}{(3+x)^2} > 0,$$

故 f 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增 (关于利用导数来判断函数的单调性, 请读者参看第三章).

若 $a_1 < \sqrt{3}$, 则

$$a_2 = f(a_1) < f(\sqrt{3}) = \frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

由数学归纳法立即可得 $a_n < \sqrt{3}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 再由

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(1+a_n) - (3+a_n)a_n}{3+a_n} = \frac{3-a_n^2}{3+a_n}$$

就可以断定 $\{a_n\}$ 是递增的有界数列.

若 $a_1 > \sqrt{3}$, 则

$$a_2 = f(a_1) > f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}.$$

用类似于上面的做法得到 $\{a_n\}$ 是递减的有界数列.

综上所述, $\{a_n\}$ 收敛, 令

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

并在 $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ 两端取极限, 即得 $a = \sqrt{3}$.

12. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}, a > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证　由题设可知 $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

当 $x > y > 0$ 时,

$$\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a} - \frac{y(y^2+3a)}{3y^2+a} = \frac{(x-y)[3(xy-a)^2 + a(x-y)^2]}{(3x^2+a)(3y^2+a)} > 0,$$

故函数 $f(x) = \frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是递增的. 于是, 若 $0 < x_1 < \sqrt{a}$, 则

$$0 < x_2 < \frac{\sqrt{a}(a+3a)}{3a+a} = \sqrt{a}, \quad \cdots, \quad 0 < x_{n+1} < \sqrt{a}.$$

又由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_n(a-x_n^2)}{3x_n^2+a}>0,$$

因此, $\{x_n\}$ 是递增且有上界的数列.

若 $\sqrt{a}\leqslant x_1$, 则同理可证, $\{x_n\}$ 是递减且有下界的数列.

综上所述,$\{x_n\}$ 收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l,$$

并在 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$ 两端取极限, 即得

$$l=\sqrt{a}.$$

13. 设 $a>0,x_1=\sqrt[3]{a},x_n=\sqrt[3]{ax_{n-1}}\ (n>1)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证 当 $0<a<1$ 时, 有

$$0<x_2=\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a}}<\sqrt[3]{a}=x_1.$$

设 $0<x_k<x_{k-1}$, 则

$$0<x_{k+1}=\sqrt[3]{ax_k}<\sqrt[3]{ax_{k-1}}=x_k.$$

故此时 $\{x_n\}$ 递减且有下界.

当 $a\geqslant 1$ 时, 有

$$a\geqslant x_2=\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a}}\geqslant\sqrt[3]{a}=x_1.$$

设 $a\geqslant x_k\geqslant x_{k-1}$, 则

$$a\geqslant x_{k+1}=\sqrt[3]{ax_k}\geqslant\sqrt[3]{ax_{k-1}}=x_k.$$

故此时 $\{x_n\}$ 递增且有上界.

因此, $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$, 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{ax_{n-1}}=\sqrt[3]{al},$$

即 $l^3=al$. 因 $l>0$, 故 $l=\sqrt{a}$.

14. 设 a_1,a_2 是实数, 令 $a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}\ (n=3,4,5,\cdots)$, 其中 $p>0,q>0,p+q=1$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证 依题设,

$$a_n=(1-q)a_{n-1}+qa_{n-2},$$

故

$$a_n-a_{n-1}=-q(a_{n-1}-a_{n-2})=\cdots=(-q)^{n-2}(a_2-a_1),$$

从而

$$\begin{aligned}a_n - a_1 &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)\\&= [(-q)^{n-2} + (-q)^{n-3} + \cdots + (-q) + 1](a_2 - a_1)\\&= \frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2 - a_1),\end{aligned}$$

即

$$a_n = \frac{1-(-q)^{n-1}}{1+q}(a_2 - a_1) + a_1.$$

因为 $p, q > 0, p + q = 1$, 故 $|q| < 1$. 于是, $\{a_n\}$ 收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_2 - a_1}{1+q} + a_1 = \frac{a_2 + a_1 q}{1+q}.$$

15. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

证　显然, 我们只要证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = 0$ 即可, 注意,

$$\begin{aligned}x_{2n} &= \sum_{i=1}^{n}(x_{2i} - x_{2i-2}) + x_0\\&= x_{2n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n}(x_{2i} - x_{2i-2}),\\x_{2n+1} &= \sum_{i=1}^{n}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) + x_1\\&= x_{2n_0+1} + \sum_{i=n_0+1}^{n}(x_{2i+1} - x_{2i-1}),\end{aligned}$$

其中 n_0, n 为任意正整数. 因此有

$$\frac{|x_{2n}|}{2n} \leqslant \frac{|x_{2n_0}|}{2n} + \frac{1}{2n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|x_{2i} - x_{2i-2}|. \tag{1}$$

因已知 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, 使当 $n \geqslant N_1$ 时, 便有

$$|x_n - x_{n-2}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

在 (1) 中令 $n_0 = N_1$, 便有

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|x_{2i} - x_{2i-2}| < \frac{n-n_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

取定 N_1 之后, 取 N_2 充分大, 使当 $n>N_2$ 时有

$$\frac{|x_{2N_1}|}{2n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时, 由 (1),(2) 便得

$$\frac{|x_{2n}|}{2n}<\varepsilon.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n}}{2n}=0$. 同理可证 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{2n+1}}{2n+1}=0$, 故得 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

16. **(Stolz 定理 1)** 设 $\{a_n\}$ 是趋于零的数列, $\{b_n\}$ 是递减趋于零的数列, 则当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$$

存在或为 $+\infty$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}.$$

证 先设极限有限且等于 r, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 m, 使 $n\geqslant m$ 时

$$r-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}<r+\varepsilon,\quad b_n-b_{n+1}>0.$$

因此, 当 $n\geqslant m$ 时,

$$(r-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(r+\varepsilon)(b_n-b_{n+1}).$$

把 n 依次换成 $n+1,n+2,\cdots,n+p-1$ 并把所得结果相加, 就得到

$$(r-\varepsilon)(b_n-b_{n+p})<a_n-a_{n+p}<(r+\varepsilon)(b_n-b_{n+p}).$$

令 $p\to\infty$ 取极限, 按假设有 $a_{n+p}\to 0, b_{n+p}\to 0$, 故得

$$(r-\varepsilon)b_n\leqslant a_n\leqslant(r+\varepsilon)b_n.$$

由于 b_n 是正的, 所以当 $n\geqslant m$ 时有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-r\right|\leqslant\varepsilon \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=r.$$

另一方面, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=+\infty,$$

那么可以找到 m, 使 $n\geqslant m$ 时 $\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}>K$, 而 K 可以任意大. 如上一样地论证可得

$$a_n-a_{n+p}>K(b_n-b_{n+p}).$$

由此, 当 $n\geqslant m$ 时, $a_n\geqslant Kb_n$ 或 $\frac{a_n}{b_n}\geqslant K$.

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

17. **(Stolz 定理 2)**　设 $b_n < b_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

则当 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ 存在或为 $+\infty$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

证　先设极限存在且等于 s, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 使当 $n > n_0$ 时

$$\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - s \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对 $n > n_0$, 有

$$\left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1}).$$

因此

$$\left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n_0}) < a_n - a_{n_0} < \left(s + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n_0}).$$

亦即当 $n > n_0$ 时

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} < s + \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意,

$$\frac{a_n}{b_n} - s = \frac{a_{n_0} - s b_{n_0}}{b_n} + \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right)\left(\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - s\right),$$

所以当 $n > n_0$ 时

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - s \right| &\leqslant \left| \frac{a_{n_0} - s b_{n_0}}{b_n} \right| + \left| \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - s \right| \\ &< \left| \frac{a_{n_0} - s b_{n_0}}{b_n} \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

取正整数 n_0' 充分大, 使 $n > n_0'$ 时

$$\left| \frac{a_{n_0} - s b_{n_0}}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > \max\{n_0, n_0'\}$ 时

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - s \right| < \varepsilon, \quad 即 \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = s.$$

另一方面, 如果 $\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \to +\infty$ $(n \to \infty)$, 则对充分大的 n 有

$$a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1}.$$

因此当 $b_n \to +\infty$ 时 $a_n \to +\infty$, 且数列 $\{a_n\}$ 对充分大的 n 必定是严格递增的. 这样, 我们就可以把上面证明的结果应用于 $\frac{b_n}{a_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

18. 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

证 令

$$x_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n},$$
$$y_n=n\quad(n=1,2,\cdots),$$

由 Stolz 定理 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

19. 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim_{n\to\infty}nx_n=1$.

证 由数学归纳法知, $0<x_n<1$. 于是

$$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}=(1-x_n)<1\quad(n=1,2,\cdots).$$

所以序列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 从而 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ 存在. 在递推公式两边令 $n\to\infty$, 得

$$x=x(1-x),$$

所以 $x=0$. 令 $b_n=\frac{1}{x_n}$, 则 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 且 $b_n<b_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 利用 Stolz 定理 2, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{b_{n+1}-b_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1.\end{aligned}$$

20. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

证法 1　令 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, y_n=n$, 则 $x_n-x_{n-1}=a_n, y_n-y_{n-1}=1$. 利用 Stolz 定理, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}a_n.\end{aligned}$$

证法 2　令 $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. 先设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

设 $n>n_0$, 则

$$\begin{aligned}|\sigma_n-a|&\leqslant\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(a_k-a)\right|+\frac{1}{n}\left|\sum_{k=n_0+1}^{n}(a_k-a)\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}(a_k-a)\right|+\frac{n-n_0}{n}\varepsilon<\frac{A}{n}+\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $A=\left|\sum_{k=1}^{n_0}(a_k-a)\right|$. 又, $\lim_{n\to\infty}\frac{A}{n}=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=a.$$

再设 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 令

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

对任给的 $M>0$, 存在 n_0, 使当 $n>n_0$ 时, $a_n>3M$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{s_n}{n}&=\frac{s_{n_0}}{n}+\frac{s_n-s_{n_0}}{n-n_0}\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\\&>\frac{s_{n_0}}{n}+3M\left(1-\frac{n_0}{n}\right).\end{aligned}$$

又因 $\frac{s_{n_0}}{n}\to 0, 1-\frac{n_0}{n}\to 1\ (n\to\infty)$, 故可取正整数 $n'>n_0$, 使当 $n>n'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_{n_0}|}{n}<\frac{M}{2},\quad 1-\frac{n_0}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是, 当 $n>n'$ 时恒有 $\frac{s_n}{n}>M$. 由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty.$$

21. 设 $\{a_n\}$ 是不减的数列, 令

$$\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明: 若 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

证 因对任意 n 均有 $a_n \leqslant a_{n+1}$, 故

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \frac{na_n}{n} = a_n. \tag{1}$$

今固定 n, 并令 $m > n$, 则

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{m}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k\right\} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m}{m} \\ &\geqslant \frac{1}{m}A + \frac{m-n}{m}a_n, \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $A = \sum_{k=1}^{n} a_k$. 在 (2) 中令 $m \to \infty$, 可得

$$a = \lim_{m\to\infty} \sigma_m \geqslant a_n.$$

再由 (1) 式可知, $\sigma_n \leqslant a_n \leqslant a$. 再令 $n \to \infty$, 即得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

22. 设 $\{s_n\}$ 是数列, 令 $a_n = s_n - s_{n-1}, \sigma_n = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}$. 证明: 若

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0,$$

且 $\{\sigma_n\}$ 收敛, 则 $\{s_n\}$ 也收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

证 易证

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k,$$

利用 Stolz 定理 2, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_k}{(n+2)-(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

23. 设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

证　设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 因 $a_n > 0$, 故 $a \geqslant 0$.

若 $a > 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$. 于是由本章问题 20, 得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) = \ln a.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} \\ &= e^{\ln a} = a.\end{aligned}$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty}(-\ln a_n) = +\infty$, 故由本章问题 20,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(-\ln a_1 - \ln a_2 - \cdots - \ln a_n) = +\infty.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}(-\ln a_1 - \ln a_2 - \cdots - \ln a_n)} \\ &= 0 = \lim_{n\to\infty} a_n.\end{aligned}$$

注　在证明过程中, 我们利用了函数 $\ln x$ 和 e^x 的连续性.

24. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 证明: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证　令 $b_1 = a_1, b_2 = \frac{a_2}{a_1}, \cdots, b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \cdots$. 由本章问题 23, 得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

25. 设 $a_n \to a, b_n \to b\ (n \to \infty)$, 令

$$c_n = \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1).$$

证明 $c_n \to ab\ (n \to \infty)$.

证　$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) b_{n-k+1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a b_{n-k+1}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)b_{n-k+1} + a \cdot \frac{b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1}{n}.$$

因 $\{b_n\}$ 收敛, 故有界. 设

$$|b_n| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)b_{n-k+1}\right| \leqslant M\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}.$$

由 $a_n \to a$ 推知 $a_n - a \to 0$, 从而 $|a_n - a| \to 0$. 于是数列 $\{|a_n - a|\}$ 的平均数的极限亦为零. 又, $b_n \to b$ $(n \to \infty)$, 故得平均数的极限也趋于 b.

综上所述, 得到 $\lim_{n\to\infty} c_n = ab$.

26. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

证 因 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, 使当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

又因

$$\begin{aligned}\frac{a}{2} = \frac{n^2 a}{2n^2} &= \frac{n(n+1)a}{2n^2} - \frac{a}{2n} \\ &= \frac{a + 2a + \cdots + na}{n^2} - \frac{a}{2n},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \frac{a}{2}\right| \\ &\quad \leqslant \left|\frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2}\right| + \frac{|a|}{2n} \\ &\quad \leqslant \left|\frac{(a_1 - a) + 2(a_2 + a) + \cdots + N_1(a_{N_1} - a)}{n^2}\right| \\ &\qquad + \left|\frac{(N_1 + 1)(a_{N_1+1} - a) + \cdots + n(a_n - a)}{n^2}\right| + \frac{|a|}{2n}.\end{aligned} \tag{2}$$

因 (2) 式右端第一项与第三项的分子是定值, 故存在 N_2, 使当 $n > N_2$ 时, 便有

$$\left|\frac{(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + N_1(a_{N_1} - a)}{n^2}\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\frac{|a|}{2n} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3}$$

对于 (2) 式右端的第二项, 我们由 (1) 可得

$$\left|\frac{(N_1+1)(a_{N_1+1}-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=N_1+1}^{n} k|a_k-a| < \frac{1}{n^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4)$$

将 (3) 与 (4) 结合起来, 便有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right| < \varepsilon, \text{ 当 } n > n_0 \text{ 时},$$

其中 $n_0=\max\{N_1,N_2\}$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

27. 设 $\{a_n\}$ 为一数列, 且

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=l.$$

求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p=1}^{n}a_p}{n^2}$.

解　令 $x_n=a_{n+1}-a_n$,

$$y_n=\frac{\sum\limits_{p=0}^{n}x_p}{n+1}=\frac{a_{n+1}-a_0}{n+1}.$$

因 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$, 故 $\lim_{n\to\infty}y_n=l$ (参看本章问题 20). 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1}=l.$$

同样, 若令

$$y_n'=\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p(a_{p+1}-a_p)}{n^2}=\frac{na_{n+1}-\sum\limits_{p=1}^{n}a_p}{n^2},$$

则由本章问题 26 可知

$$\lim_{n\to\infty}y_n'=\frac{l}{2}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}a_p}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n}-\frac{l}{2}=\frac{l}{2}.$$

28. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0. \tag{1}$$

证明数列 $\{a_n\}$ 无界.

证 (反证法) 设 $\{a_n\}$ 有界, 记

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=M<+\infty.$$

因 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$, 故 $M\geqslant 0$. 由 (1), 存在正整数 n_0, 使当 $n\geqslant n_0$ 时, 便有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\frac{1}{2},\quad a_n<\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_{n+2}),$$

故

$$a_n<\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}\quad (n\geqslant n_0). \tag{2}$$

由 (2) 迭代递推, 可知对于任意正整数 k, 均有

$$a_{n_0}<\max\{a_{n_0+k},a_{n_0+k+1}\}. \tag{3}$$

因 $a_{n_0}>0$, 故由 (3) 便知 $M>0$, 亦即

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=M>0.$$

按定义便知对于 $\varepsilon=\frac{M}{2}$ 而言, 有正整数 m 及一串递增的正整数 n_i, 满足: $m<n_i$ 且 $n_i\to\infty\ (i\to\infty)$, 以及

$$a_n<\frac{3M}{2},\ \text{当}\ n>m\ \text{时},$$
$$a_{n_i}>\frac{M}{2}\quad (i=1,2,\cdots).$$

这样一来, 便有

$$\frac{a_{n_i}}{a_{n_i+1}+a_{n_i+2}}>\frac{\frac{1}{2}M}{\frac{3}{2}M+\frac{3}{2}M}=\frac{1}{6}\quad (i=1,2,\cdots),$$

此与已知条件 (1) 发生矛盾, 所以数列 $\{a_n\}$ 无界.

29. 证明: 对于任何实数列 $\{a_n\}$, 下述条件

(A) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_1}+e^{ia_2}+\cdots+e^{ia_n}}{n}=a$

和

(B) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_1}+e^{ia_4}+\cdots+e^{ia_{n^2}}}{n^2}=a$

是等价的.

证　(A)⇒(B). 设 (A) 成立, 因收敛数列的任何子列都收敛, 且极限相同, 故 (B) 成立.

(B)⇒(A). 为简化记法, 我们令

$$c_r = e^{ia_r},\quad s(t) = c_1 + c_2 + \cdots + c_t.$$

因 $|c_r| = 1$, 故

$$|s(t+k) - s(t)| \leqslant k.$$

现设条件 (B) 成立, 并记 $m = n^2 + k$, 式中 $0 \leqslant k \leqslant 2n$, 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{s(m)}{m} - \frac{s(n^2)}{n^2}\right| &\leqslant \left|\frac{s(m)}{m} - \frac{s(n^2)}{m}\right| + \left|\frac{s(n^2)}{n^2} - \frac{s(n^2)}{m}\right| \\ &\leqslant \frac{k}{m} + n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{k+m-n^2}{m} = \frac{2k}{m} \leqslant \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{s(m)}{m} - \frac{s(n^2)}{n^2}\right) = 0,$$

即

$$\lim_{m\to\infty}\frac{s(m)}{m} = a.$$

30. 设 $x_1 \in [0,1]$, 对 $n \geqslant 2$, 令

$$x_n = \begin{cases}\dfrac{1}{2}x_{n-1}, & n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{1+x_{n-1}}{2}, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

问: 数列 $\{x_n\}$ 有多少个极限点?

解　因为

$$\begin{aligned}\left|x_{2n} - \frac{1}{3}\right| &= \frac{1}{2}\left|x_{2n-1} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+x_{2n-2}}{2} - \frac{2}{3}\right| \\ &= \frac{1}{4}\left|x_{2n-2} - \frac{1}{3}\right|,\end{aligned}$$

所以 $x_{2n} \to \frac{1}{3}, x_{2n+1} \to \frac{2}{3}$ $(n \to \infty)$, 亦即数列 $\{x_n\}$ 有两个极限点:$\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$.

31. 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 而且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

证明: $\{x_n\}$ 的聚点的集合是 $[a,b]$, 其中

$$a = \varliminf_{n\to\infty} x_n,\quad b = \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

证 根据定义, a 与 b 都是 $\{x_n\}$ 的聚点, 故我们只要证明 a 与 b 之间的任意实数 $x(a<x<b)$ 都是 $\{x_n\}$ 的聚点即可.

先证: 对于任给的 $\varepsilon>0$ 及任给的正整数 n_0', 必有 $n^*>n_0'$ 存在, 使得

$$|x_n^*-x|<\varepsilon.$$

事实上, 由假定可知必有正整数 n_0'' 存在, 使当 $n>n_0''$ 时恒有

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon.$$

令 $n_0=\max\{n_0',n_0''\}$, 则数列 $\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}$ 中必至少有两项 $x_{n'}$ 和 $x_{n''}$ 存在, 使 $x_{n'}<x, x_{n''}>x$ (因为否则的话, 例如, 无小于 x 的项, 则必 $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n\geqslant x$, 此与 $a<x$ 矛盾). 不妨设 $n'<n''$, 令满足 $n'\leqslant n\leqslant n''$ 且使 $x_n<x$ 的正整数 n 中之最大者为 n^*. 显然, $n^*\leqslant n''-1$, 且 $x_{n^*}<x, x_{n^*+1}>x$. 因此, $x^*>n_0$, 且

$$|x_{n^*}-x|<x_{n^*+1}-x_{n^*}<\varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1=1, N_1=1$, 则存在 $x_{n_1}(n_1>1)$, 使 $|x_{n_1}-x|<1$; 再取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}, N_2=n_1$, 则存在 x_{n_2} $(n_2>n_1)$, 使 $|x_{n_2}-x|<\frac{1}{2}$; 又取 $\varepsilon_3=\frac{1}{3}, N_3=n_2$, 则存在 x_{n_3} $(n_3>n_2)$, 使 $|x_{n_3}-x|<\frac{1}{3}$; 如此继续下去, 得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$|x_{n_k}-x|<\frac{1}{k}\quad(k=1,2,\cdots),$$

故 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$, 即 x 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点.

32. 设 $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, 0<\alpha<2\pi, a_n=\cos(\alpha s_n), b_n=\sin(\alpha s_n)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的聚点全体都是闭区间 $[-1,1]$.

证 任取 $\beta\in[0,\pi]$, 我们证明 $\cos\beta$ 是 $\{a_n\}$ 的聚点. 为此, 任取 $\varepsilon>0$ 及 $k>\frac{\alpha^2}{2\pi\varepsilon}$ $(k\in N)$. 因 $\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty$, 故集 $\{n:\alpha s_n\leqslant 2\pi k+\beta\}$ 有上界. 记 n_1-1 是这个集的最大元, 则

$$\alpha s_{n_1-1}\leqslant 2\pi k+\beta<\alpha s_{n_1}.$$

显然 $n_1>s_{n_1}$, 故

$$n_1>\frac{2\pi k+\beta}{\alpha}\geqslant\frac{2\pi k}{\alpha}>\frac{\alpha}{\varepsilon}\quad 且\quad n_1>k.$$

由此得到

$$0<\alpha s_{n_1}-(2\pi k+\beta)<\frac{\alpha}{n_1}<\varepsilon.$$

但此时

$$|\cos(\alpha s_{n_1})-\cos\beta|<|\alpha s_{n_1}-2\pi k-\beta|<\varepsilon,$$

故对任意 $\varepsilon > 0$ 及任意 $k \in N$, 存在 $n_1 > k$ 且

$$|a_{n_1} - \cos\beta| < \varepsilon.$$

这样, $[-1, 1]$ 中每一点 $x = \cos\beta$ 都是 $\{a_n\}$ 的聚点. 对 $\{b_n\}$ 可同样证明.

33. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是递增的无界数列, 且

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0.$$

证明: $\{a_n - b_m : n, m \in N\}$ 在实数集中稠密.

证　任取实数 r 及 $\varepsilon > 0$, 则存在 k 使得对于一切 $n \geqslant k$, 有

$$a_{n+1} - a_n < \varepsilon.$$

取 m 足够大使 $b_m \geqslant a_k - r$, 并由条件 $a_n \leqslant b_m + r < a_{n+1}$, 使得 $n \geqslant k$ (唯一) 确定. 于是

$$|(a_n - b_m) - r| < |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

注　若取 $a_n = b_n = \sqrt{n}$, 便知 $\{\sqrt{n} - \sqrt{m} : n, m \in N\}$ 在实数集中稠密.

34. 设 $0 \leqslant a_{n+m} \leqslant a_n \cdot a_m$ $(n, m = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 存在.

证　因 $a_n \leqslant a_{n-1}a_1 \leqslant a_{n-2}a_1^2 \leqslant \cdots \leqslant a_1^n$, 故

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant a_1.$$

即数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 有界. 设

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a,$$

则 $0 \leqslant a \leqslant a_1$. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $n_0 > 1$, 使得

$$n_0\sqrt{a_{n_0}} < a + \varepsilon,$$

由于任何正整数 $n > n_0$ 均可表为 $n = qn_0 + r$ 的形式, 其中 q 为正整数, r 为不大于 n_0 的非负整数, 因而

$$\begin{aligned} a_n = a_{qn_0+r} &\leqslant a_{(q-1)n_0}a_{n_0}a_r \leqslant a_{(q-2)n_0}a_{n_0}^2 a_r \\ &\leqslant \cdots \leqslant a_{n_0}^q a_r \leqslant a_{n_0}^q a_1^r. \end{aligned}$$

于是 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant a_{n_0}^{\frac{q}{n}} a_1^{\frac{r}{n}}$. 当 $a_{n_0} \geqslant 1$ 时,

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant a_{n_0}^{\frac{q}{n}} a_1^{\frac{r}{n}} \leqslant a_{n_0}^{\frac{1}{n_0}} a_1^{\frac{r}{n}} \leqslant (a+\varepsilon) a_1^{\frac{r}{n}}.$$

而当 $0 \leqslant a_{n_0} \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &\leqslant a_{n_0}^{\frac{q}{n}} a_1^{\frac{r}{n}} \leqslant a_{n_0}^{\frac{q}{n_0}(q+1)} a_1^{\frac{r}{n}} \\ &\leqslant (a+\varepsilon)^{\frac{q}{(q+1)}} a_1^{\frac{r}{n}}.\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时 $q \to \infty$, 所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant a+\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant a$, 所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}.$$

因此, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 存在.

35. 设 $0 \leqslant a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ $(m,n=1,2,\cdots)$. 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ 存在.

证 对任意正整数 m, 当 $n \geqslant m$ 时有唯一的正整数 q, r, 使 $n = qm+r, 0 \leqslant r \leqslant m$. 记 $a_0 = 0$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} &= \frac{a_{qm+r}}{n} \leqslant \frac{a_{qm}+a_r}{n} = \frac{a_{qm}}{qm+r} + \frac{a_r}{n} \\ &\leqslant \frac{qa_m}{qm+r} + \frac{a_r}{n} \leqslant \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n}.\end{aligned}$$

因 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_r}{n} = 0$, 于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_m \frac{a_m}{m}.$$

此外, 对任意正整数 n, 有

$$\frac{a_n}{n} \geqslant \inf_m \frac{a_m}{m},$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \geqslant \inf_m \frac{a_m}{m},$$

从而 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ 存在且等于 $\inf_m \frac{a_m}{m}$.

注 可以证明, 若不假定 $a_n \geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 可能发散于 $-\infty$.

36. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件:

$$a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1. \tag{1}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \omega, \tag{2}$$

其中 ω 为有限数, 且有

$$n\omega - 1 \leqslant a_n \leqslant n\omega + 1. \tag{3}$$

证　由 (1) 得到

$$a_{m+n}+1<(a_m+1)+(a_n+1)$$

及

$$1-a_{m+n}<(1-a_m)+(1-a_n).$$

据本章问题 35, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{n}=\omega,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-a_n}{n}=\omega_1=-\omega, \tag{4}$$

且知 ω 为数列 $\{\frac{a_n+1}{n}\}$ 的下确界或 $-\infty$, 即 ω 不为 $+\infty$; 又 $-\omega$ 为数列 $\{\frac{1-a_n}{n}\}$ 的下确界或 $-\infty$, 亦即 $-\omega$ 不为 $+\infty,\omega$ 不为 $-\infty$, 从而 ω 为有限数. 由 (4) 得到 (2) 且有

$$\frac{a_n+1}{n}\geqslant\omega,\quad \frac{1-a_n}{n}\geqslant-\omega,$$

故进一步得到 (3).

37. 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_n\geqslant 0$. 证明: 若对每一正整数 m,n, 都有 $a_{mn}\geqslant ma_n$ 且

$$\sup\left\{\frac{a_n}{n}\right\}=c<+\infty,$$

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 存在 ([22], 1982, p. 337).

证　若 $c=0$, 则显然有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

若 $c>0$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0 使

$$c-\frac{1}{2}\varepsilon<\frac{a_{n_0}}{n_0}\leqslant c.$$

因 $a_{mn}\geqslant ma_n$, 故对每一 m, 有

$$c-\frac{1}{2}\varepsilon<\frac{a_{mn_0}}{mn_0}\leqslant c.$$

于是当 $n\geqslant n_0$ 满足 $mn_0\leqslant n<(m+1)n_0$ 时, 就有

$$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_{mn_0}}{(m+1)n_0}=\frac{a_{mn_0}}{mn_0}\cdot\frac{m}{m+1}. \tag{1}$$

当 $\frac{m}{m+1}$ 充分接近 1 时, (1) 式右端大于 $c-\varepsilon$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=c.$$

38. 设 $\{a_n\}$ 是数列, 它满足不等式

$$0\leqslant a_k\leqslant 100a_n\quad (n\leqslant k\leqslant 2n,n=1,2,\cdots),$$

且使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

证 按假设, 对任何正整数 n, a_{2n} 小于或等于 n 个数 $100\,a_n, 100\,a_{n+1}, \cdots, 100\,a_{2n-1}$ 中的每一个. 因此, 相加并乘以 2 便得

$$\begin{aligned} 2na_{2n} &\leqslant 200\,(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}) \\ &\to 0\ (n \to \infty). \end{aligned}$$

同理, a_{2n-1} 小于或等于 n 个数 $100\ a_n, 100\ a_{n+1}, \cdots, 100\ a_{2n-1}$ 中的每一个, 因此

$$\begin{aligned} (2n-1)a_{2n-1} &\leqslant 2na_{2n-1} \\ &\leqslant 200\,(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1}) \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

39. **(Toeplitz 定理)** 设 $p_{n0} + p_{n1} + \cdots + p_{nn} = 1\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 又设 $y_n = p_{n0}x_0 + p_{n1}x_1 + \cdots + p_{nn}x_n\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 且 $p_{ij} \geqslant 0\ (i, j = 0, 1, 2, \cdots)$. 证明: 由 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 推出 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

证 必要性: 对任一 m, 当 $n \geqslant m$ 时定义 x_n 如下:

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots, m, m+1, \cdots).$$

显然 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 且此时有

$$y_n = p_{nm} \quad (n \geqslant m).$$

根据条件有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0.$$

充分性: 因 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在 $M > 0$ 使

$$|x_n - a| < M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N^*, 当 $n > N^*$ 时

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $\lim_{n\to\infty} p_{ni} = 0\ (i = 0, 1, 2, \cdots, N^*)$, 故存在 $N_i > N^*$, 当 $n > N_i$ 时

$$0 \leqslant p_{ni} < \frac{\varepsilon}{2} N^* M \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, N^*).$$

令 $n_0 = \max_{0 \leqslant i \leqslant N^*} N_i$, 当 $n > n_0$ 时

$$
\begin{aligned}
|y_n - a| &= \left| \sum_{i=0}^{n} p_{ni} x_i - \sum_{i=0}^{n} p_{ni} a \right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{N^*} p_{ni} |x_i - a| + \sum_{i=N^*+1}^{n} p_{ni} |x_i - a| \\
&< N^* M \cdot \frac{\varepsilon}{2N^* M} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=N^*+1}^{n} p_{ni} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

40. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足条件:

(i) $b_n > 0, b_0 + b_1 + \cdots + b_n \to +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = s$.

证明

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} = s.
$$

证 令

$$
\begin{aligned}
p_{nm} &= \frac{b_m}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n}, \\
x_n &= \frac{a_n}{b_n} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n; n = 0, 1, 2, \cdots),
\end{aligned}
$$

则

$$
\lim_{n\to\infty} p_{nm} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots).
$$

因为

$$
\begin{aligned}
y_n &= p_{n0} x_0 + p_{n1} x_1 + \cdots + p_{nn} x_n \\
&= \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n},
\end{aligned}
$$

故由 Toeplitz 定理可知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{b_0 + b_1 + \cdots + b_n} &= \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \\
&= s.
\end{aligned}
$$

41. 设 $p_k > 0\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$. 又设

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = 0$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

证明

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 p_n + s_1 p_{n-1} + \cdots + s_n p_0}{p_0 + p_1 + \cdots + p_n} = s.
$$

证 令

$$p_{nm}=\frac{p_{n-m}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}\quad (m=0,1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots).$$

因为

$$0<p_{nm}\leqslant\frac{p_{n-m}}{p_0+p_1+\cdots+p_{n-m}}\to 0\quad (n\to\infty),$$

所以对任意固定的 m 有 $\lim_{n\to\infty}p_{nm}=0$ 且

$$\sum_{m=0}^{n}p_{nm}=1.$$

又因为

$$\begin{aligned}y_n&=p_{n0}s_0+p_{n1}s_1+\cdots+p_{nn}s_n\\&=\frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0}{p_0+p_1+\cdots+p_n},\end{aligned}$$

所以由 Toeplitz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0p_n+s_1p_{n-1}+\cdots+s_np_0}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}s_n=s.$$

42. 设 $p_k>0,q_k>0\ (k=0,1,2,\cdots)$. 又设

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_n}{q_0+q_1+\cdots+q_n}=0$;

(ii) $r_n=p_0q_n+p_1q_{n-1}+\cdots+p_nq_0\ (n=0,1,2,\cdots)$.

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_0+r_1+\cdots+r_n}=0.$$

证 令

$$P_n=\sum_{i=0}^{n}p_i,\quad Q_n=\sum_{i=0}^{n}q_i,\quad R_n=\sum_{i=0}^{n}r_i\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

又令

$$p_{nm}=\frac{p_{n-m}Q_m}{p_0Q_n+p_1Q_{n-1}+\cdots+p_nQ_0}\quad (m\leqslant n).$$

显见

$$p_{nm}\leqslant\frac{p_{n-m}}{p_0+p_1+\cdots+p_{n-m}}\to 0\quad (n\to\infty),$$

所以对任一固定的 m 有

$$\lim_{n\to\infty}p_{nm}=0\quad 且\quad \sum_{m=0}^{n}p_{nm}=1.$$

又因

$$\frac{r_n}{R_n} = \frac{p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \cdots + p_n q_0}{p_0 Q_n + p_1 Q_{n-1} + \cdots + p_n Q_0}$$
$$= p_{n0}\frac{q_0}{Q_0} + p_{n1}\frac{q_1}{Q_1} + \cdots + p_{nn}\frac{q_n}{Q_n},$$

故据 Toeplitz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{r_0 + r_1 + \cdots + r_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{Q_n} = 0.$$

43. 证明: 若一族开区间 $\{I_\alpha\}$ 覆盖闭区间 $[0,1]$, 则必存在一正数 δ, 使得 $[0,1]$ 中任何两点 x', x'' 满足 $|x' - x''| < \delta$ 时必属于某个开区间 I_α.

证　据有限覆盖定理, 存在有限个开区间 $I_1, I_2, \cdots, I_k$, 使 $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$.

若命题不真, 则对 $\delta_n = \frac{1}{n}$ 而言, 存在 $x_n', x_n'' \in [0,1]$, 一方面, $|x_n' - x_n''| < \delta_n$, 而另一方面, x_n', x_n'' 不同时属于某个开区间 I_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

因 $\{x_n'\} \subset [0,1]$, 故存在子列 $\{x_{n_j}'\}$, 使

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j}' = x_0' \in [0,1].$$

又 $\{x_{n_j}''\} \subset [0,1]$, 故存在子列 $\{x_{n_{j_h}}''\}$, 使

$$\lim_{h\to\infty} x_{n_{j_h}}'' = x_0'' \in [0,1].$$

而 $|x_{n_{j_h}}' - x_{n_{j_h}}''| < \delta_{n_{j_h}} \to 0$ $(h \to \infty)$, 故 $x_0' = x_0'' = x_0$, 且 x_0 属于某个开区间 I_i, 即 x_0 是 I_i 的一个内点. 因

$$\lim_{h\to\infty} x_{n_{j_h}}' = \lim_{h\to\infty} x_{n_{j_h}}'' = x_0,$$

故存在 h_0, 当 $h > h_0$ 时 $x_{n_{j_h}}', x_{n_{j_h}}'' \in I_i$. 此与反证法的假定发生矛盾.

44. 证明下列断语是等价的:

(I) Dedekind 分割原理;

(II) 确界存在原理;

(III) 单调有界原理;

(IV) 区间套定理;

(V) 有限覆盖定理;

(VI) 聚点原理;

(VII) 有界数列必有收敛子列;

(VIII) Cauchy 收敛准则.

证 (I) $\Rightarrow$ (II): 只要证明, 若数集 D 有上界, 则 D 必有唯一的上确界.

1° 若 D 有最大值 M, 则 M 就是 D 的上确界.

2° 设 D 为无限集且无最大值. 做实数集 R^1 的分割 (X,Y), 其中 Y 为 D 的一切上界所组成之集, X 为 Y 的补集. 于是

(i) $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$,

(ii) $X \cap Y = \emptyset$,

(iii) 任取 $x \in X$, 若存在 $y \in Y$ 使 $y \leqslant x$, 则 x 成为 D 的一个上界, 从而 $x \in Y$, 这与 (ii) 矛盾. 故对任意 $y \in Y, x \in X$, 均有 $x < y$.

因此, (X,Y) 是一个 Dedekind 分割. 由分割原理, 存在唯一 $\alpha \in R^1$, 使对任意 $x \in X, y \in Y$ 有

$$x \leqslant \alpha < y \quad 或 \quad x < \alpha \leqslant y.$$

因 α 不可能是 X 的最大值 (若 α 是 X 的最大值, 则 $\alpha \in Y$, 从而 $X \cap Y \neq \emptyset$, 矛盾!) 故对一切 $x \in X$, 均有 $x < \alpha$, 即 $x \leqslant \alpha < y$ 不能成立. 这样, 只有 $x < \alpha \leqslant y$ 成立, 即 α 是 Y 中的最小者, 也就是 D 的上界中的最小者, 故 D 有唯一的上确界 α.

(II) $\Rightarrow$ (III): 不妨假设 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界. 据确界存在原理, $\{x_n\}$ 必有上确界 a, 即

$$\sup\{x_n\} = a.$$

兹证 a 就是 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限.

事实上, 由上确界定义知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n_0, 使

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant a.$$

再据 $\{x_n\}$ 单调增加, 可知对任何 $n > n_0$ 均有

$$x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant a.$$

因此, 当 $n > n_0$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

(III) $\Rightarrow$ (IV): 设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

由 (i) 知数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a \geqslant a_n \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

又因对每一 n, b_n 是 $\{a_n\}$ 的上界, 且 a 是 $\{a_n\}$ 的最小上界, 故

$$a \leqslant b_n \quad (n=1,2,\cdots). \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知 $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 即

$$a \in [a_n, b_n] \quad (n=1,2,\cdots).$$

若还存在实数 b 使

$$b \in [a_n, b_n] \quad (n=1,2,\cdots),$$

则 $0 \leqslant |a-b| \leqslant b_n - a_n \to 0$ $(n\to\infty)$, 故 $a=b$.

(IV) $\Rightarrow$ (V): 设 $\mathscr{D}$ 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 假如 $[a,b]$ 不能被 $\mathscr{D}$ 中任何有限个开集覆盖, 将 $[a,b]$ 等分为两个区间, 则其中至少有一个区间不能被 $\mathscr{D}$ 中任何有限个开集覆盖, 记此区间为 $[a_1,b_1]$. 再等分 $[a_1,b_1]$, 同样至少有一个不能被 $\mathscr{D}$ 中任何有限个开集覆盖, 记此区间为 $[a_2,b_2]$. 如此继续下去, 得到一列闭区间

$$[a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n],\cdots,$$

适合

(i) 任何一个 $[a_n,b_n]$ 都不能被 $\mathscr{D}$ 中任何有限个开集覆盖.

(ii) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n] \subset [a,b] \quad (n=1,2,\cdots)$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

据区间套定理, 存在唯一实数 $c \in [a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

因 $\mathscr{D}$ 覆盖了 $[a,b]$, 故 $\mathscr{D}$ 中至少有一个开集从而至少有一个开区间 (α,β), 使得

$$c \in (\alpha,\beta).$$

由极限性质知存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时有

$$\alpha < a_n < b_n < \beta,$$

即 $[a_n,b_n] \subset (\alpha,\beta)$. 因此, (α,β) 覆盖了 $[a_n,b_n]$ $(n>n_0)$. 这与 (i) 发生矛盾.

(V) $\Rightarrow$ (VI): 设 D 为有界的无限集. 令

$$a=\inf D, \quad b=\sup D,$$

则 $D \subset [a,b]$. 假如 D 没有聚点, 那么对任意 $x\in[a,b]$, 存在 x 的邻域 $U(x,\delta_x) = (x-\delta_x, x+\delta_x)$, 使 $U(x,\delta_x)$ 中至多含有 D 的有限个点, 即 $U(x,\delta_x)\cap D$ 是有限集. 显然, 当 x 走遍 $[a,b]$ 时, 这些邻域就覆盖了 $[a,b]$, 即

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} U(x,\delta_x).$$

据有限覆盖定理, 存在有限个邻域 $U(x_1,\delta_1),\cdots,U(x_n,\delta_n)$, 它们足以覆盖 $[a,b]$, 即

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i,\delta_i),$$

从而 $D\subset\bigcup_{i=1}^{n}U(x_i,\delta_i)$. 由此得到 D 为有限集, 此为矛盾. 因此, D 必有聚点.

(VI) $\Rightarrow$ (VII): 设 $\{x_n\}$ 是有界无穷数列. 若 $\{x_n\}$ 是由有限个实数重复出现而构成的数列, 则至少有一个数 c 要重复出现无穷多次. 设 c 重复出现的项为 $n_1,n_2,\cdots$, 则

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c,$$

即 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列.

现设 $\{x_n\}$ 确由无穷多个不同的实数组成, 则此数列为一有界无穷集. 据聚点原理, $\{x_n\}$ 至少有一聚点 c. 于是, 对任何 k, $\left(c-\frac{1}{k},c+\frac{1}{k}\right)$ 中必含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 从而在 $\left(c-\frac{1}{k},c+\frac{1}{k}\right)$ 中可以选出 $\{x_n\}$ 的一个项 x_{n_k} 使 $x_{n_k}\neq c$. 因 k 是任意正整数, 故得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}\in\left(c-\frac{1}{k},c+\frac{1}{k}\right)$, 因而

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c.$$

(VII) $\Rightarrow$ (VIII): 必要性是显然的.

兹证充分性. 据条件, 对 $\varepsilon=1$, 存在 n_0, 当 $n,m>n_0$ 时有

$$|x_n-x_m|<1.$$

于是,

$$|x_n|\leqslant|x_n-x_{n_0+1}|+|x_{n_0+1}|<1+|x_{n_0+1}|.$$

令

$$M=\max\{|x_1|,\cdots,|x_{n_0}|,1+|x_{n_0+1}|\},$$

则 $|x_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$, 故 $\{x_n\}$ 有界. 因此存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c.$$

于是由不等式

$$|x_n-c|\leqslant|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|$$

可知, $\lim_{n\to\infty}x_n=c$.

(VIII) $\Rightarrow$ (I): 设 (X,Y) 是全体实数 R^1 的任意一个分割. 因 $X\neq\emptyset,Y\neq\emptyset$, 故可任取 $a_1\in X,b_1\in Y$, 则 $b_1>a_1$. 将 $[a_1,b_1]$ 等分为二, 若分点 $\frac{a_1+b_1}{2}\in X$ 就取右半区间并记为 $[a_2,b_2]$; 若 $\frac{a_1+b_1}{2}\in Y$, 则取左半区间并记为 $[a_2,b_2]$. 总之, $a_2\in X,b_2\in Y$. 如此继续下去, 得到闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$, 满足

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

(iii) $a_n \in X, b_n \in Y$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

由 (i), (ii) 可知数列

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$$

是 Cauchy 数列, 因而收敛. 设其极限为 $c \in R^1$. 若 $c \in X$, 可证 c 必为 X 的最大值. 事实上, 假如存在 $x \in X$ 而有 $c < x$, 取正数 $\varepsilon = x - c$, 则

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset X.$$

由 (iii), 每个 $b_n \notin (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, 这与 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$ 收敛于 c 发生矛盾. 因此, c 为 X 的最大值. 此时 Y 显然无最小值. 类似地可证, 若 c 在 Y 中, 则 c 必是 Y 的最小值, 此时 X 无最大值.

注　本题中八个等价的断语从不同的角度刻画了**实数的连续性** (又称**完备性**).

反　例

1. 一个发散数列 $\{a_n\}$, 使 $\{|a_n|\}$ 收敛.

设 $a_n = (-1)^{n-1}(n = 1, 2, \cdots)$. 显然, $\{a_n\}$ 发散, 但 $\{|a_n|\}$ 收敛.

注　容易证明, 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\{|a_n|\}$ 必收敛于 $|a|$. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

2. 一个收敛数列与一个发散数列, 其积是收敛数列.

设 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{a_n\}$ 收敛于 0, $\{b_n\}$ 发散至 $+\infty$, 而 $\{a_n b_n\}$ 却收敛于 1.

3. 一个收敛数列和一个发散数列, 其积是发散数列.

设 $x_n = \frac{1}{n+1}, y_n = n\sin\frac{n\pi}{2}(n = 1, 2, \cdots)$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 而其积 $\{x_n y_n\}$ 也发散.

4. 两个非负的发散数列, 其积却收敛.

设 $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}, y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为发散数列. 但 $x_n y_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因而数列 $\{x_n y_n\}$ 收敛于零.

5. 两个非负的发散数列, 其和却是一个收敛数列.

取数列

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$$

及数列

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, \cdots,$$

显然, 这两个数列都发散, 但其对应项相加所组成的数列是

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \cdots ,$$

它是一个收敛数列.

6. 算术平均值收敛的发散数列.

称 $y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 为数列 $\{x_n\}$ 的**算术平均值**. 可以证明, 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它的算术平均值所组成之数列也收敛 (参看本章问题 20). 应当注意, 这个命题之逆并不成立. 例如, 取 $x_n = (-1)^{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则数列 $\{x_n\}$ 发散. 但

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0.$$

7. 对每个正整数 p, 都有 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ 的发散数列 $\{a_n\}$.

取 a_n 为调和级数的第 n 部分和:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

这时数列 $\{a_n\}$ 是发散的, 但是, 对于每个正整数 p, 都有

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

注 极限 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ 对于 p 不是一致的. 事实上, 可以证明, 为使 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ 对于 p 是一致的, 当且仅当 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 因此, 对于具有性质 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ 的发散数列 $\{a_n\}$, 极限 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ 对于 p 就不可能是一致的.

8. 任给严格递增的正整数列 $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$, 可构造发散数列 $\{a_n\}$, 使 $\lim_{n\to\infty}(a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$.

应用归纳法原理, 容易证明, 对一切 $n = 1, 2, \cdots$, 有 $\varphi(n) \geqslant n$. 更一般地, 对一切 n 和 $k = 1, 2, \cdots$, 有 $\varphi(n + k) \geqslant n + \varphi(k)$. 所以 $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$. 现分两种情况来讨论:

(i) 若 $\{\varphi(n) - n\}$ 有界, 即存在常数 M, 使对一切 $n = 1, 2, \cdots$, 都有

$$\varphi(n) - n \leqslant M,$$

这时 $\{a_n\}$ 可以取为调和级数的部分和的数列, 因此, $\{a_n\}$ 是发散的. 另一方面, 有

$$\begin{aligned} a_{\varphi(n)} - a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{\varphi(n)} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{\varphi(n)} \\ &\leqslant \frac{M}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

(ii) 若 $\{\varphi(n)-n\}$ 无界, 设 k 是能使 $\varphi(k)>k$ 的最小正整数, 并令

$$a_n=\begin{cases}1, & n=k,\varphi(k),\varphi(\varphi(k)),\cdots,\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

由于 $\{\varphi(n)\}$ 严格递增, 因而 $\{a_n\}$ 中存在着一个恒等于 1 的无穷子列; 又因为 $\{\varphi(n)-n\}$ 无界, 所以 $\{a_n\}$ 中还会有一个恒等于零的无穷子列存在, 因此 $\{a_n\}$ 发散. 另一方面, 对每个 $n=1,2,\cdots$, 按 a_n 的定义, 恒有 $a_{\varphi(n)}=a_n$, 所以 $a_{\varphi(n)}-a_n\to 0\ (n\to\infty)$.

9. 存在一个收敛数列, 它不是有界变差数列.

数列 $\{x_n\}$ 叫作**有界变差**的, 是指存在常数 M, 使

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots).$$

可以证明, 有界变差数列必为收敛数列. 但是, 这个命题之逆并不成立. 例如, 令

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k},$$

则有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=\left|(-1)^n\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right]\right|\\&=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots\\&<\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

于是, 按 Cauchy 收敛准则, $\{x_n\}$ 收敛. 但是

$$\begin{aligned}s_n&=|x_1|+|x_2-x_1|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\\&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

因此, $\{x_n\}$ 不是有界变差数列.

10. Cauchy 数列的几种弱形式之间的关系.

古典 Cauchy 定理给出了数列收敛的充要条件如下:

I. 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$, 当 $n,n'\geqslant n(\varepsilon)$ 时, 就有

$$|a_n-a_{n'}|<\varepsilon.$$

II. 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$, 当 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 时, 对任何 $m\in N$, 都有

$$|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon.$$

III. 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$, 使对一切 $m \in N$, 都有

$$|a_{n(\varepsilon)+m} - a_{n(\varepsilon)}| < \varepsilon.$$

我们自然要问: 当 N 代以它的真子集时, 这些条件是否还是充分的? 为回答这一问题, 我们设 $P \subset N, s = \{a_n\}$ 是数列, 并引入下列概念:

定义 1 数列 s 称为**在类 $\mathscr{M}(P)$ 中**, 是指对每一 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$, 当 $n \geqslant n(\varepsilon)$ 且 $p \in P$ 时, 就有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

定义 2 数列 s 称为**在类 $\mathscr{N}(P)$ 中**, 是指对每个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $n(\varepsilon)$, 当 $p \in P$ 时, 就有

$$|a_{n(\varepsilon)+p} - a_{n(\varepsilon)}| < \varepsilon.$$

定义 3 数列 s 称为**在类 $\mathscr{K}(P)$ 中**, 是指对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in N$, 存在正整数 $n(\varepsilon, m) \geqslant m$, 当 $p \in P$ 时, 就有

$$|a_{n(\varepsilon,m)+p} - a_{n(\varepsilon,m)}| < \varepsilon.$$

我们用 $\mathscr{C}$ 代表一切收敛数列所组成之集, 则

I 即为 $\mathscr{C} = \{\text{Cauchy 数列}\}$;

II 即为 $\mathscr{C} = \mathscr{M}(N)$;

III 即为 $\mathscr{C} = \mathscr{N}(N)$.

Neculce[59] 证明了 $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}(P) \subset \mathscr{H}(P) \subset \mathscr{N}(P)$, 但它们并不相等, 从而否定地回答了上面提出的问题.

例 1 集 P 使 $\mathscr{M}(P) \neq \mathscr{C}$.

令 $P = \{p : p = 2k, k \in N\}$, 则在 $\mathscr{M}(P)$ 中存在发散数列.

事实上, 取 $s = \{a_n\}$, 其中

$$a_n = 0, n = 2m; a_n = 1, n = 2m-1; m \in N.$$

显然, $s \in \mathscr{M}(P)$, 且 s 发散.

例 2 集 P 使 $\mathscr{M}(P) \neq \mathscr{K}(P)$.

考虑数列 $s = \{a_n\}$, 其定义为

$$a_n = 0, n = 4k-2, k \in N;$$
$$a_n = 1, n = 2k-1 \text{ 或 } n = 4k, k \in N.$$

对每个 $m \in N$, 我们取 $n(\varepsilon, m) = 4k' \geqslant m$, 则

$$|a_{4k'+2k-1} - a_{4k'}| = 0,$$

故 $s \in \mathscr{X}(P)$, 这里 $P = \{p : p = 2k-1, k \in N\}$. 然而, $s \notin \mathscr{M}(P)$.

例 3 集 P 使 $\mathscr{X}(P) \neq \mathscr{N}(P)$.

考虑数列 $s = \{a_n\}$, 其定义如下:

$$a_n = 0, n = 1 \text{ 或 } n = 2k, k \in N;$$
$$a_n = 1, n = 2k+1, k \in N.$$

易见, 对每个 $\varepsilon > 0$, 我们取 $n(\varepsilon) = 1$, 则当 $p \in P$ 时, 就有

$$|a_{n(\varepsilon)+p} - a_{n(\varepsilon)}| = 0,$$

故 $s \in \mathscr{N}(P)$, 这里 $P = \{p : p = 2k-1, k \in N\}$. 然而, 数列 s 不在 $\mathscr{X}(P)$ 中, 因为对 $m > 1$, 我们取 $n(\varepsilon, m) = 2k' > m$, 则有

$$|a_{2k'+2k-1} - a_{2k'}| = 1.$$

若取 $n(\varepsilon, m) = 2k'+1 > m$, 则有

$$|a_{2k'+1+2k-1} - a_{2k'+1}| = 1.$$

第二章　函　　数

基本概念和主要结果

本章所考虑的一切集合, 包括函数的定义域和值域, 都假定是 R^1 的子集, 除非另有明确的声明. 这个假定在全书中除第七、八两章外都有效.

设 f 是定义域为 D 的函数, S 是 D 的一个子集, 则 f 在 S 上的**限制**就是定义域为 S 的函数 g, 使当 $x\in S$ 时 $g(x)=f(x)$. 如果 g 是 f 的限制, 则称 f 为 g 的**扩张**.

如果两个函数 f 和 g, g 的值域是 f 的定义域的一个子集, 则有 f 和 g 的**复合函数**, 记作 $f\circ g$, 这个函数在 g 的定义域内的点 x 上的值是 $f[g(x)]$; 简言之, 函数 $y=f[g(x)]$ 称为函数 $f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 的复合.

设 f 是 D 上的**有界函数**, 即存在常数 m,M, 使得对一切 $x\in D$, 有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M.$$

我们称

$$m_*=\inf_{x\in D}f(x)\quad 与\quad M^*=\sup_{x\in D}f(x)$$

为 f 在 D 上的**下确界**与**上确界**, 称

$$\omega=M^*-m_*$$

为 f 在 D 上的**振幅**.

设 f 是定义在 D 上的函数, a 是 D 的一个点或是 D 的一个聚点, f 叫作在**点 a 局部有界**, 是指存在 a 的一个邻域, 使 f 在其上是有界的; f 叫作在 D 的一个子集A **上局部有界**, 是指 f 在 A 的每个点都是局部有界的.

f 叫作在点 $a\in D$ 取得**局部极大值**, 是指存在 a 的某个邻域 $U(a,\delta)$, 使对任何 $x\in U(a,\delta)\cap D$, 恒有 $f(x)\leqslant f(a)$. 类似地, 可定义 f 在点 $a\in D$ 取得**局部极小值**.

函数 f 叫作在 D 上**递增** (或**单调增加**) 的, 是指对于任意的 $x_1,x_2\in D$, 当 $x_1<x_2$ 时, 不等式 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 成立. 若对于一切的 $x_1\in D,x_2\in D,x_1<x_2$, 不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立, 则称 f 在 D 上为**严格递增** (或**严格单调增加**) **函数**. 类似地可定

义递减函数和**严格递减函数**. 若函数 f 在 D 上为递增或递减函数, 则称它是 D 上的**单调函数**; 类似地可定义**严格单调函数**.

设 f 是定义在区间 I 上的函数, 若对任意开区间 $(\alpha,\beta)\subset I$, f 在 (α,β) 上都不是单调的, 则称 f 在 I 上是**无处单调**的.

设 I 是函数 f 的定义域内的一个区间, 称 f 在 I 上具有**介值性质**, 是指对于任意 $a,b\in I(a<b)$, 以及 $\mu\in R^1$ 适合 $f(a)<\mu<f(b)$ 或 $f(a)>\mu>f(b)$, 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f(c)=\mu$.

设 f 是区间 I 上的函数. 称 f 为**凸函数**, 如果对任意 $x_1,x_2\in I, 0<\lambda<1$, 有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

设 f 是定义在 D 上的函数, 若对一切 $x\in D$, 都有 $f(x)=x$, 则称 f 为**恒等函数**. 若对一切 $x\in D$, 都有 $f(x)=C$ (C 为常数), 则称 f 为**常值函数**.

正负号函数的定义和记号为

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

括号函数 $[x]$ 代表不超过 x 的最大整数.

集 E 的**特征函数** φ_E 定义为

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

设函数 f 在 x_0 附近 (可以不含 x_0) 有定义, 称 f 在 x 趋于 x_0 时以 a 为**极限**, 是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-a|<\varepsilon,$$

并记为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ 或 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to a$.

若当 x 保持大于 x_0 (小于 x_0) 而趋于 x_0 时, $f(x)$ 趋于 a, 则称 a 为 f 在 $x=x_0$ 处的**右极限** (**左极限**), 并记为

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a \quad \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a\right),$$

或记为 $f(x_0+0)=a$ ($f(x_0-0)=a$).

显然, 函数 f 在 x_0 处有极限, 当且仅当 f 在 x_0 处有左、右极限并且相等, 此时

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Cauchy 准则 设函数 f 在 x_0 附近有定义 (不必包含 x_0), 则 f 在 x_0 处有极限, 当且仅当任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

设 f 在 x_0 附近有定义 (可以不包含 x_0), 称

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) \quad \left(\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{0 < |x - x_0| < \delta} f(x) \right)$$

为函数 f 在 x_0 处的**上 (下) 极限**. 上极限有时亦记为

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sup f(x),$$

下极限有时记为

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \lim_{x \to x_0} \inf f(x).$$

设 f 是闭区间 $[a, b]$ 上的递增函数, $x_0 \in [a, b)$. 数

$$f(x_0) - f(x_0 - 0) \quad 和 \quad f(x_0 + 0) - f(x_0)$$

分别叫作 f 在 x_0 处的**左跃度**和**右跃度**. 数

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

叫作 f 在 x_0 处的**跃度** (对端点 a, b, 只考虑单边跃度).

设 f 是定义域为 D 的函数, $x_0 \in D$. 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对满足 $|x_0 - x| < \delta$ 的所有 $x \in D$, 有

$$|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 **连续**. 若 f 在 x_0 不连续, 则称 f 在该点**间断**. 若函数 f 在 D 的各个点都连续, 则称 f 在 D **上连续**. 若 f 在 D 的各个点都不连续, 则称 f 在 D 上**无处连续**.

若 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处**左连续**; 若 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处**右连续**.

显然, f 在 x_0 处连续, 当且仅当 f 在 x_0 处左连续且右连续.

若 $\overline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处**上半连续**; 若 $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0)$, 则称 f 在 x_0 处**下半连续**.

设 x_0 是函数 f 的间断点. 若 $f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ 与 $f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ 皆存在, 则称 x_0 为 f 的**第一类间断点**; 若 $f(x_0 + 0)$ 与 $f(x_0 - 0)$ 中至少有一个不存在, 则称 x_0 为 f 的**第二类间断点**.

设 f 是定义在 D 上的函数, 若对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要 $|x_1-x_2|<\delta, x_1, x_2\in D$, 必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称 f 在 D 上**一致连续**.

连续函数的性质:

1. 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

2. 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上达到最大值与最小值.

3. **连续函数介值定理** 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意实数 μ, 至少存在一点 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$f(\zeta)=\mu.$$

4. 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

本章的某些问题和反例, 还要用到无穷级数的收敛性和一致收敛性, 一致收敛的 Weierstrass 判别法以及集合论的基础知识.

问 题

1. 设 f 和 g 都是区间 $[0,1]$ 上的实值函数. 证明: 存在 $x\in[0,1], y\in[0,1]$, 使得

$$|xy-f(x)-g(y)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

证 (反证法) 若对任意 $x\in[0,1], y\in[0,1]$, 都有

$$|xy-f(x)-g(y)|<\frac{1}{4},$$

则作为特例, 应有

$$|f(1)-g(0)|<\frac{1}{4},\quad |f(0)+g(1)|<\frac{1}{4},\quad |f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}.$$

另一方面, 由三角不等式得到

$$\begin{aligned}|1-f(1)-g(1)|&\geqslant 1-|f(1)+g(1)|\\&\geqslant 1-|f(1)+g(0)|-|-g(0)-f(0)|-|f(0)+g(1)|\\&>\frac{1}{4},\end{aligned}$$

矛盾.

2. 设 f 为 $(-\infty,+\infty)$ 内不减函数, $x_0\in(-\infty,+\infty), x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$, 又设 $x_0=a$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 收敛. 证明: 当 $\min\{a,f(a)\}\leqslant x_0\leqslant\max\{a,f(a)\}$ 时, $\{x_n\}$ 也收敛.

证　记 $x_0^{(a)}=a, x_n^{(a)}=f(x_{n-1}^{(a)})$ $(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n^{(a)}=A$. 不妨设 $a<f(a)$. 已知 $x_0=a$ 时 $\{x_n\}$ 收敛, 故考虑 $a<x_0\leqslant f(a)$. 又 f 为不减函数, $x_1^{(a)}=f(a)>a$, 故

$$\begin{aligned}&a<x_0\leqslant f(a)=x_1^{(a)},\\&x_1^{(a)}<x_1=f(x_0)\leqslant f(x_1^{(a)})=x_2^{(a)}.\end{aligned}$$

依次做下去, 一般有

$$x_{n+1}^{(a)}\leqslant x_{n+1}\leqslant x_{n+2}^{(a)}\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是, 据极限比较法则知

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=A.$$

3. 设 x_1 是实数, $x_{n+1}=a\sin x_n$ $(n\geqslant1)$, 这里 $|a|\leqslant\frac{\pi}{2}$. 讨论数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

解　只需考虑 $x_1\geqslant0$ 的情形. 当 $x_1=0$ 时, $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 设 $x_1>0$. 如果 $a<0$, 则取与 $-a$ 对应的数列记作 $\{y_n\}$, 我们得到 $y_n=(-1)^{n-1}x_n$. 因此, 只需考虑 $a\geqslant0$.

当 $0\leqslant a\leqslant1$ 时, 我们得到 $x_n\geqslant0, x_{n+1}=a\sin x_n\leqslant x_n$, 亦即 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在并且可从方程 $x=a\sin x$ 求得它等于 0.

当 $1<a\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, 方程 $x=a\sin x$ 有非零解 x^*. 容易验证, 当 $x_1<x^*$ 时, $x_n<x^*(n\geqslant1)$, 且数列 $\{x_n\}$ 递增并趋向于 x^*; 而当 $x_1>x^*$ 时, $\{x_n\}$ 递减且趋向于 x^*. 因此, 当 $a>1$ 时, $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$.

当 $-1\leqslant a<0$ 时, $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

当 $a<-1$ 时, $\lim_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

4. 设 $x_0=p, x_1=p+q\sin x_0,\cdots,x_n=p+q\sin x_{n-1},\cdots(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛于某个 ζ, 而且 ζ 是方程

$$x=p+q\sin x\quad(0<q<1)$$

的唯一解.

证　对任意正整数 m, 有

$$\begin{aligned}x_{n+m}-x_n&=q(\sin x_{n+m-1}-\sin x_{n-1})\\&=\frac{q}{2}\cos\frac{x_{n+m-1}+x_{n-1}}{2}\sin\frac{x_{n+m-1}-x_{n-1}}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$|x_{n+m}-x_n|<\frac{q}{2}\left|\sin\frac{x_{n+m-1}-x_{n-1}}{2}\right|$$
$$<\frac{q}{2^2}|x_{n+m-1}-x_{n-1}|<\cdots<\frac{q}{2^n}|x_{m+1}-x_1|.$$

又由于

$$|x_{m+1}-x_1|\leqslant\frac{q}{2}\left|\cos\frac{x_m+x_0}{2}\sin\frac{x_m+x_0}{2}\right|$$
$$\leqslant\frac{q}{2},$$

所以

$$|x_{n+m}-x_n|\leqslant\frac{q}{2^{n+1}}.$$

因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列, 从而收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\zeta,$$

则

$$\zeta=p+q\sin\zeta.$$

若有另一解 $\eta,\eta=p+q\sin\eta$, 则

$$\zeta-\eta=q(\sin\zeta-\sin\eta).$$

因此

$$0\leqslant|\zeta-\eta|=q|\sin\zeta-\sin\eta|\leqslant q|\zeta-\eta|.$$

又 $0<q<1$, 故必有 $\zeta=\eta$.

5. 给定实数 x_0, 令 $x_1=\cos x_0,x_2=\cos x_1,\cdots,x_n=\cos x_{n-1},\cdots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证 因 $|x_1|\leqslant 1$, 故不妨设 $0\leqslant x_1\leqslant 1$, 则 $x_n\geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$. 我们比较 x_1 与 x_3. 若 $x_1\leqslant x_3$, 则

$$x_4-x_2=\cos x_3-\cos x_1=-2\sin\frac{x_3-x_1}{2}\sin\frac{x_3+x_1}{2}\leqslant 0,$$

故 $x_4\leqslant x_2$.

$$x_5-x_3=\cos x_4-\cos x_2=-2\sin\frac{x_4-x_2}{2}\sin\frac{x_4+x_2}{2}\geqslant 0,$$

故 $x_5\geqslant x_3$.

容易用数学归纳法证明 $\{x_{2n-1}\}$ 递增且有上界, $\{x_{2n}\}$ 递减且有下界, 故它们都收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}=\alpha, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n}=\beta.$$

由 $\cos x$ 的连续性可得 $\cos\alpha=\beta, \cos\beta=\alpha$. 于是, $\alpha=\cos\cos\alpha, \beta=\cos\cos\beta$. 由 $f(x)=x-\cos\cos x$ 的零点的唯一性得 $\alpha=\beta$, 所以 $\{x_n\}$ 的奇子列 $\{x_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{x_{2n}\}$ 收敛于同一极限, 从而 $\{x_n\}$ 收敛.

对于 $x_1\geqslant x_3$, 同理可证 $\{x_n\}$ 收敛.

6. 设 $a_0=0, a_1=1+\sin(a_0-1), \cdots, a_n=1+\sin(a_{n-1}-1)$ $(n=1,2,\cdots)$. 求

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}.$$

解　设 $b_n=a_n-1$, 则 $b_0=-1, b_n=\sin b_{n-1}, \cdots$. 由归纳法可知 b_n 都是负的, 故

$$b_n<\sin b_n=b_{n+1}.$$

因此, 数列 $\{b_n\}$ 递增且有上界, 从而收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty} b_n=L,$$

则 $\sin L=L$, 故 $L=0, \lim_{n\to\infty} a_n=1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty} a_n=1.$$

7. 设 $a>0, s_1=\ln a, s_n=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(a-s_k)$ $(n=2,3,\cdots)$. 证明: $\lim_{n\to\infty} s_n=a-1$.

证　因对 $x>0$, 不等式 $\ln x\leqslant x-1$ 恒成立, 故

$$s_1=\ln a\leqslant a-1.$$

现设 $s_i\leqslant a-1$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$, 由

$$s_n-s_{n-1}=\ln(a-s_{n-1})$$

得 $s_n-s_{n-1}\leqslant a-s_{n-1}-1$, 即 $s_n\leqslant a-1$. 所以 $\ln(a-s_n)$ 有意义且数列 $\{s_n\}$ 有界. 又因 $\{s_n\}(n\geqslant 2)$ 递增, 故 $\{s_n\}$ 收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s,$$

对 $s_n-s_{n-1}=\ln(a-s_{n-1})$ 取极限, 即得 $s=a-1$.

8. 设 x 为任意实数, 讨论 $\lim_{n\to\infty}\sin nx$ 和 $\lim_{n\to\infty}\cos nx$ 是否存在.

解 就数列 $\{\sin nx\}$ 进行讨论.

(i) 若 $x=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $\sin nx=0$, 故 $\lim_{n\to\infty}\sin nx=0$.

(ii) 若 $x\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $\frac{x}{2}\neq k\frac{\pi}{2}$, 故 $\sin\frac{x}{2}\neq 0,\cos\frac{x}{2}\neq 0$.

因 $\{\sin nx\}$ 有界, 故 $\{\sin nx\}$ 或收敛, 或无限振荡, 二者必居其一. 今设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=l,$$

则对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时有

$$l-\varepsilon<\sin nx<l+\varepsilon.$$

当然也有

$$l-\varepsilon<\sin(n+1)x<l+\varepsilon.$$

因此

$$|\sin(n+1)x-\sin nx|<2\varepsilon.$$

从而

$$\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}\right|<\varepsilon.$$

因 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, 故

$$\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|<\frac{\varepsilon}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{1}$$

又, 当 $n>n_0+1$ 时有

$$|\sin nx-\sin(n-1)x|<2\varepsilon.$$

由此得到

$$\left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right|<\frac{\varepsilon}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{2}$$

由恒等式

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\cos nx\cos\frac{x}{2}-\sin nx\sin\frac{x}{2},$$
$$\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x=\cos nx\cos\frac{x}{2}+\sin nx\sin\frac{x}{2}$$

和 (1), (2) 两式, 可得

$$|\cos nx|<\frac{\varepsilon}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|\left|\cos\frac{x}{2}\right|},$$
$$|\sin nx|<\frac{\varepsilon}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|^2}.$$

故同时得到

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

即 $l=0$. 但这与恒等式 $\sin^2 nx+\cos^2 nx=1$ 矛盾. 故 $\{\sin nx\}$ 不收敛, 而是无限振荡的.

综合上述可得结论: 仅当 x 为 π 的整数倍时, $\{\sin nx\}$ 收敛于 0, x 不等于 π 的整数倍时, $\lim_{n\to\infty}\sin nx$ 不存在.

对 $\{\cos nx\}$ 可同样讨论, 其结论是: 仅当 x 等于 π 的偶数倍时, $\lim_{n\to\infty}\cos nx=1$, x 不等于 π 的偶数倍时, $\lim_{n\to\infty}\cos nx$ 不存在.

9. 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调, 且 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(b), x_n\in[a,b]$. 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n=b$.

证 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上是严格递增的. 任给 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<b-a)$, 我们只要证明存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时就有 $b-\varepsilon<x_n\leqslant b$ 即可.

因 f 严格递增, 故 $f(b-\varepsilon)<f(b)$. 又, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(b)$, 故存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时就有 $f(x_n)>f(b-\varepsilon)$. 而 f 严格递增, 故由 $f(x_n)>f(b-\varepsilon)$ 得到 $x_n>b-\varepsilon$. 因此, 对一切 $n>n_0$, 有 $b-\varepsilon<x_n\leqslant b$, 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=b.$$

10. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, $\{x_n\}\subset[a,b]$ 且 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$. 证明存在点 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=A$.

证 因 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 故 $\{x_n\}$ 中必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$. 因 $a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$, 故 $x_0\in[a,b]$.

又, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 故 $\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=A$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 因而

$$A=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f\left(\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\right)=f(x_0).$$

11. 设 f 于区间 (a,b) 内连续, 而且

$$l=\varliminf_{x\to a}f(x),\quad L=\varlimsup_{x\to a}f(x).$$

证明对任意 $\lambda\in[l,L]$, 皆有数列 $\{x_n\}, x_n\to a$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

证 由上、下极限定义, 存在数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$, 使 $x_n'\to a, x_n''\to a\ (n\to\infty)$, 且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=l,\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n'')=L.$$

今构造数列 $\{x_n\}$:

$$x_n = \begin{cases} x'_k, & n = 2k, \\ x''_k, & n = 2k-1. \end{cases}$$

显然, $x_n \to a\ (n \to \infty)$, 而且 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$. 又

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = l, \quad \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

因 f 连续, 故

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_{n+1}) - f(x_n)] = 0.$$

于是由第一章问题 31 可知结论成立.

12. 证明 Riemann 函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 内的有理数 } \dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数}, q > 0, \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 内的无理数}. \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 内的无理点连续, 而在 $[0,1]$ 内的有理点不连续.

证 显然, f 在 $x_0 = 0$ 处不连续. 今任取 $x_0 \in (0,1]$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 使 $\frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$ 的正整数 q 只有有限个, 而 p 与 q 互素, 故使 $\frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$ 的 $[0,1]$ 内的分数 $\frac{p}{q}$ 也只有有限个, 从而在 $[0,1]$ 内使 $f(x) \geqslant \varepsilon$ 且异于 x_0 的 x 也只有有限个, 不妨设其为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$. 取 $\delta = \min_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_0|$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$ 成立, 从而恒有

$$|f(x) - 0| < \varepsilon$$

成立. 这样就证明了对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - 0| < \varepsilon.$$

因此, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. 这就证明了 Riemann 函数 f 在 $[0,1]$ 内的无理点连续, 而在 $[0,1]$ 内的有理点不连续.

13. 设 f 为 $[a,b]$ 上的递增函数, 其值域为 $[f(a), f(b)]$. 证明 f 在 $[a,b]$ 上连续.

证 (反证法) 假若不然, 即存在 $x_0 \in [a,b]$, 使 f 在点 x_0 不连续. 因 f 在 $[a,b]$ 上递增, 故 x_0 为 f 的跳跃间断点. 因此, $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ 中至少有一个大于零, 例如可设 $f(x_0) - f(x_0 - 0) > 0$. 于是, 由 f 的单调性可知, f 无法取到 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0)$ 之间的数值, 这与题设矛盾. 因此, f 在 $[a,b]$ 上连续.

14. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续. 证明

$$m(x) = \inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x} f(\zeta) \quad \text{与} \quad M(x) = \sup_{a\leqslant\zeta\leqslant x} f(\zeta)$$

是 $[a,b]$ 上的单调连续函数.

证　易见, m 在 $[a,b]$ 上是递减的.

任取 $x_0\in[a,b], a\leqslant x_n\leqslant x_0$ 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, 则

$$m(x_n)=\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_n}f(\zeta),\quad m(x_0)=\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}f(\zeta).$$

令

$$\widehat{f}(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant x_n,\\ f(x_n), & x_n\leqslant x\leqslant x_0.\end{cases}$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时,

$$-\varepsilon<f(x_n)-f(x_0)<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}m(x_n)-m(x_0)&=\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_n}f(\zeta)-\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}f(\zeta)\\&=\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}\widehat{f}(\zeta)-\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}f(\zeta).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}0\leqslant&\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}\widehat{f}(\zeta)-\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}f(\zeta)\leqslant\inf_{a\leqslant\zeta\leqslant x_0}\left\{\widehat{f}(\zeta)-f(\zeta)\right\}\\=&\inf_{x_n\leqslant\zeta\leqslant x_0}\{f(x_n)-f(\zeta)\}<\varepsilon,\end{aligned}$$

故

$$m(x_0-0)=m(x_0).$$

同理可证 $m(x_0+0)=m(x_0)$. 因此, m 在点 x_0 处连续.

用类似的方法亦可证明 M 在 $[a,b]$ 上递增且连续.

15. 设 $\{f_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数列. 对于任一点 $x\in[a,b],\{f_n(x)\}$ 都有界, 即存在依赖于 x 的常数 M_x, 使

$$|f_n(x)|\leqslant M_x\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 的某个子区间 I 上**一致有界**, 即存在常数 M, 使对一切 $x\in I$ 及 $n=1,2,\cdots$, 都有

$$|f_n(x)|\leqslant M.$$

证 (反证法)　假若不然, 则存在 n_1 及 $x_1\in[a,b]$, 使

$$|f_{n_1}(x_1)|>1.$$

因 f_{n_1} 连续, 故存在含有 x_1 的子区间 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ (不妨设 $b_1-a_1<\frac{1}{2}$), 使对任意 $x\in[a_1,b_1]$, 恒有

$$|f_{n_1}(x)|>1.$$

又因 $\{f_n:n\neq n_1\}$ 在 $[a_1,b_1]$ 上非一致有界, 故存在 n_2 及 $x_2\in[a_1,b_1]$, 使

$$|f_{n_2}(x_2)|>2.$$

因 f_{n_2} 连续, 故存在含有 x_2 的子区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$, 使 $b_2-a_2<\frac{1}{2^2}$, 且 $|f_{n_2}|$ 在 $[a_2,b_2]$ 上处处大于 2. 如此继续下去, 得到

$$n_1<n_2<\cdots,$$

及递减的闭区间列 $\{[a_k,b_k]\}$, 使对任意 $x\in[a_k,b_k]$, 都有

$$|f_{n_k}(x)|>k,$$

这里 $a_k<a_{k+1},b_k>b_{k+1}$, 且 $b_k-a_k\to 0$ $(k\to\infty)$. 于是, 据闭区间套原理, 存在 $x_0\in[a_k,b_k]$ $(k=1,2,\cdots)$. 这样一来, 对任何 k 均有

$$|f_{n_k}(x_0)|>k,$$

此与题设 $\{f_{n_k}(x_0)\}$ 有界发生矛盾.

16. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的实值函数, 且具有介值性质, 即若 $f(a)<c<f(b)$, 则在 a 与 b 之间必有 x, 使 $f(x)=c$. 再设当 r 是有理数时, $\{x:f(x)=r\}$ 是闭集. 证明 f 是连续函数.

证 (反证法) 假如存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 使 f 在 x_0 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 和以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$, 使得

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots).$$

首先, 设 $\{x_n\}$ 中有无穷多个点 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots$, 使得

$$f(x_{n_k})<f(x_0)-\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots).$$

则存在有理数 r 使得

$$f(x_{n_k})<r<f(x_0)\quad(k=1,2,\cdots).\tag{1}$$

因 f 具有介值性质, 故在 x_0 与 x_{n_k} 之间存在 ζ_k 而有 $r=f(\zeta_k)$ $(k=1,2,\cdots)$. 据条件, $F=\{\zeta:f(\zeta)=r\}$ 是闭集, 故

$$\lim_{k\to\infty}\zeta_k=x_0\in F,$$

从而 $f(x_0)=r$, 这与 (1) 发生矛盾.

其次, 若只有有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 使

$$f(x_i)<f(x_0)-\varepsilon \quad (i=1,2,\cdots,p),$$

则 $\{x_n\}$ 中必有无穷子列 $\{x_{n_j}\}$ 满足

$$f(x_{n_j})>f(x_0)-\varepsilon.$$

仿照前面的讨论, 亦可得出矛盾.

综上所述, 可知 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

17. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的递增函数, 且 $\lim_{t\to-\infty}f(t)=0,\lim_{t\to+\infty}f(t)=1$. 对 $0<x<1$, 令

$$g(x)=\inf\{t:f(t)>x\}.$$

证明 g 是开区间 $(0,1)$ 上的右连续函数.

证　显然, g 也是递增函数. 设 $x_0\in(0,1)$, 任给 $\varepsilon>0$, 则有 $t_0\in(-\infty,+\infty)$ 使

$$t_0<g(x_0)+\varepsilon,\quad f(t_0)>x_0.$$

因而存在 $\delta>0$, 使 $f(t_0)>x_0+\delta$. 于是对所有 $x_0<x<x_0+\delta$, 都有

$$t_0\in\{t:f(t)>x\},\quad g(x)=\inf\{t:f(t)>x\}\leqslant t_0<g(x_0)+\varepsilon.$$

按定义便知 g 为 $(0,1)$ 上的右连续函数.

18. 设 f 是区间 I 上的凸函数, 即对任意 $x_1,x_2\in I$ 及 $\lambda_1\geqslant0,\lambda_2\geqslant0,\lambda_1+\lambda_2=1$, 恒有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).$$

证明: f 在区间 I 的任何闭子区间上有界, 但在 I 上未必有界

证　设 $[a,b]\subset I$. 对任意 $x\in[a,b]$, 存在 $\lambda\in[0,1]$, 使

$$x=a+\lambda(b-a)=\lambda b+(1-\lambda)a.$$

由条件知

$$\begin{aligned}f(x)&=f[\lambda b+(1-\lambda)a]\\&\leqslant\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a)\leqslant|f(b)|+|f(a)|,\end{aligned}$$

故 f 在 $[a,b]$ 上有上界, 设 M 为其上界.

另一方面, 令 $t=x-\frac{1}{2}(a+b)$, 则

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)&=f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]\\&\leqslant\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}M,\end{aligned}$$

即 $f(x)\geqslant 2f(\frac{a+b}{2})-M$, 故 f 在 $[a,b]$ 上有下界. 因此, f 在 $[a,b]$ 上有界. 但 f 在 I 上未必有界. 例如, 取 $f(x)=\frac{1}{x}, I=(0,+\infty)$, 则 f 是 I 上的凸函数, 而它在 I 上无界.

19. 证明: 不能在 $R^1=(-\infty,+\infty)$ 上定义一个在所有的有理点连续, 而在所有的无理点不连续的函数.

证 设 f 是定义在 R^1 上的实值函数. 我们分三步证明上述结论. 先引进记号:

$$\begin{aligned}&C(f)=\{x:f \text{ 在 } x \text{ 处连续}\},\\&D(f)=\{x:f \text{ 在 } x \text{ 处不连续}\},\\&\omega(f,\Delta)=\sup_{x,x'\in\Delta}|f(x)-f(x')|,\end{aligned}$$

其中 Δ 是有界闭区间, 称 $\omega(f,\Delta)$ 为 f 在 Δ 上的振幅.

$$\omega(f,x)=\inf\{\omega(f,\Delta):\Delta \text{ 为内部含有 } x \text{ 的有界闭区间}\},$$

称 $\omega(f,x)$ 为 f 在 x 处的振幅.

(i) 证明 $x\in C(f)$ 的充要条件是 $\omega(f,x)=0$. 这个由 f 在 x 处连续的定义便可推知.

(ii) 证明 $C(f)$ 是 G_δ 集, $D(f)$ 是 F_σ 集.

事实上, 对每个正整数 n, 作集合

$$E_n=\left\{x:x\in R^1 \text{ 且 } \inf_{\Delta_x}\omega(f,\Delta_x)\geqslant\frac{1}{n}\right\},$$

其中 Δ_x 是内部含有 x 的有界闭区间. E_n 是闭集, 理由如下: 若 E_n 的导集 $E_n'=\emptyset$, 则结论成立. 若 $E_n'\neq\emptyset$, 任取 $x_0\in E_n'$, 则存在 $\{x_k\}\subset E_n$ $(x_k\neq x_0)$ 而有

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_0. \tag{1}$$

假若 $x_0\notin E_n$, 那么 $\inf_{\Delta_{x_0}}\omega(f,\Delta_{x_0})<\frac{1}{n}$. 于是总存在一个内部含有 x_0 的有界闭区间, 记作 $[\alpha,\beta]$ 或 Δ_0, 使得 $\omega(f,\Delta_0)<\frac{1}{n}$, 或

$$\sup_{x,x'\in\Delta_0}|f(x)-f(x')|<\frac{1}{n}. \tag{2}$$

又因 $x_0 \in (\alpha, \beta)$, 故由 (1) 知存在充分大的 k_0, 使 $x_{k_0} \in (\alpha, \beta)$. 由 (2) 可知

$$\inf_{\Delta_{x_{k_0}}} \omega(f, \Delta_{x_{k_0}}) < \frac{1}{n}.$$

但此事与 $x_{k_0} \in E_n$ 矛盾. 因此, $x_0 \in E_n$, 即 E_n 是闭集.

如果 $x \in D(f)$, 由 (i) 知 $\omega(f, x) > 0$, 故总存在 n 使 $x \in E_n$, 于是

$$D(f) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

反之, 如果 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则必存在 m 使 $x \in E_m$. 再由 (i) 可推知 $x \notin C(f)$, 即 $x \in D(f)$. 于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset D(f).$$

由此得到

$$D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

在上式两端取补集, 应用 de Morgan 公式知

$$C(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

其中 $G_n = R^1 \backslash E_n$ 是开集. 因此, $D(f)$ 是 F_σ 集, $C(f)$ 是 G_δ 集.

(iii) 证明有理数集 Q 不可能表示为可数个开集之交.

事实上, 如果 Q 可以表示为可数个开集 G_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 之交, 即

$$Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

那么 $G_n \supset Q$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 又, Q 在 R^1 中稠密, 故 G_n 是 R^1 中的稠密开集. 不难证明, 可数个稠密开集之交仍是稠密开集. 而 Q 不是开集, 矛盾.

由 (ii), (iii) 可知, 在 R^1 上不存在在所有有理点处连续, 而在所有无理点处不连续的实值函数.

20. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任何 $x \geqslant 0$ 有

$$\lim_{n \to \infty} f(x + n) = 0, \quad n \text{ 是正整数}.$$

证明

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

证 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in [0, +\infty)$ 且 $|x - y| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的这种点的有限集, 使对每个 $x \in [0,1]$, 可以找到 $i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$, 满足 $|x - x_i| < \delta$, 于是对任何 $x \geqslant 0$, 总存在正整数 n, 使得对于某个 i 有 $|x - x_i - n| < \delta$. 又由假设 $\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$, 故存在正整数 n_0, 当 $n \geqslant n_0$ 时, 对一切 $x_i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$, 有

$$|f(x_i + n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

注意, 当 $x > n_0 + 1$ 时, 对于某个 $i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$ 及 $n > n_0$, 有 $|x - x_i - n| < \delta$, 从而

$$|f(x)| \leqslant |f(x_i + n)| + |f(x) - f(x_i + n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

21. 证明: 有界区间 (a, b) 上的一致连续函数必定有界.

证 设 f 是有界区间 (a, b) 上的一致连续函数, 则对 $\varepsilon_0 = 1$, 存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta_0$ 时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < 1.$$

现考虑区间 $\left[a + \frac{\delta_0}{2}, b - \frac{\delta_0}{2}\right]$. 因 f 在 (a, b) 上一致连续, 故它亦必在 $\left[a + \frac{\delta_0}{2}, b - \frac{\delta_0}{2}\right]$ 上连续, 从而存在常数 M, 使

$$|f(x)| \leqslant M \quad \left(a + \frac{\delta_0}{2} \leqslant x \leqslant b - \frac{\delta_0}{2}\right).$$

任取 $x \in \left(a, a + \frac{\delta_0}{2}\right]$, 则有

$$\left|x - \left(a + \frac{\delta_0}{2}\right)\right| \leqslant \frac{\delta_0}{2} < \delta_0,$$

因而

$$\left|f(x) - f\left(a + \frac{\delta_0}{2}\right)\right| < 1.$$

于是

$$|f(x)| < \left|f\left(a + \frac{\delta_0}{2}\right)\right| + 1.$$

同理可证在 $\left[b - \frac{\delta_0}{2}, b\right)$ 上, 有

$$|f(x)| < \left|f\left(b - \frac{\delta_0}{2}\right)\right| + 1.$$

综上所述, 可知 f 在 (a, b) 上有界.

注　对于无界区间, 问题 21 并不成立. 例如, 取 $f(x)=x$, 则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 但 f 并不有界.

22. 证明: 有界区间 (a,b) 上的连续函数 f 为一致连续的充分必要条件是 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 均存在.

证　充分性: 设 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 均存在. 令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b),\\ f(a+0), & x=a,\\ f(b-0), & x=b,\end{cases}$$

则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 故它在 $[a,b]$ 上一致连续, 从而在 (a,b) 上也一致连续. 因在 (a,b) 上 $F(x)=f(x)$, 故 f 在 (a,b) 上一致连续.

必要性: 设 f 是 (a,b) 上的一致连续函数, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于 $x',x''\in(a,b)$, 当 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta_1=\frac{\delta}{2}$, 则对 $x_1,x_2\in(a,b)$, 当 $0<|x_1-a|<\delta_1, 0<|x_2-a|<\delta_1$ 时,

$$|x_1-x_2|\leqslant|x_1-a|+|x_2-a|<2\delta_1=\delta,$$

故

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

于是由函数的 Cauchy 准则可知, f 在 a 的右极限 $f(a+0)$ 存在. 同理可证 $f(b-0)$ 也存在.

注　当 (a,b) 为无界区间时, 充分性仍成立, 但必要性不再成立, 例如, 设 $f(x)=\sin x$, 则 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 而 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 并不存在.

23. 设函数 f 定义在有界区间 (a,b) 上, 且对 (a,b) 内的任意收敛数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在. 证明 f 在 (a,b) 上一致连续.

证　先证 f 在 (a,b) 上连续, 即对任意 $x_0\in(a,b)$, 有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

设 $\{x_n\}$ 是 (a,b) 内任一收敛于 x_0 的数列. 令

$$y_n=\begin{cases} x_n, & n=2k,\\ x_0, & n=2k-1,\end{cases}$$

则 $y_n \to x_0\ (n \to \infty)$. 由题设知 $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ 存在, 故其子列 $\{f(y_{2k})\}$ 与 $\{f(y_{2k-1})\}$ 均收敛且有相同的极限, 从而

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} f(x_{2k}) &= \lim_{k\to\infty} f(y_{2k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{2k-1}) \\ &= \lim_{k\to\infty} f(x_0) = f(x_0).\end{aligned}$$

又因为 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在, 所以

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{2k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

从而 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. 于是

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

再证 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 都存在. 为此, 设 $\{x_n\},\{x'_n\}$ 为 (a,b) 内任意两个收敛于 a 的数列. 令

$$z_n = \begin{cases} x_n, & n = 2k, \\ x'_n, & n = 2k-1, \end{cases}$$

则 $z_n \to a\ (n\to\infty)$, 从而 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ 存在. 于是

$$\lim_{k\to\infty} f(z_{2k}) = \lim_{k\to\infty} f(z_{2k-1}).$$

又因 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 与 $\lim_{n\to\infty} f(x'_n)$ 也都存在, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{k\to\infty} f(x_{2k}) = \lim_{k\to\infty} f(z_{2k}), \\ \lim_{n\to\infty} f(x'_n) &= \lim_{k\to\infty} f(x'_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} f(z_{2k-1}).\end{aligned}$$

因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. 可见 $f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x)$ 存在. 同理可证 $f(b-0)$ 也存在. 于是, 由本章问题 22 可知, f 在 (a,b) 上一致连续.

24. 证明: f 在区间 I 上一致连续的充分必要条件是, 对任意 $\varepsilon > 0$ 及 $x, y \in I$, 存在实数 P, 当 $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} > P (x \neq y)$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

证 充分性: 任给 $\varepsilon > 0$. (i) 若题中的 $P > 0$, 可取 $\delta = \frac{\varepsilon}{P}$. 当 $x, y \in I\ (x \neq y)$ 且 $|x-y| < \delta$ 时, 或者有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant P,$$

此时

$$|f(x) - f(y)| < P\delta = \varepsilon;$$

或者有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} > P,$$

此时按题设有

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

(ii) 若题中的 $P \leqslant 0$, 则对任意 $x, y \in I$, 不等式 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ 恒成立.

综上所述, f 在 I 上一致连续.

必要性: 假若不然, 则存在 $\varepsilon_0 > 0, x_0, y_0 \in I$ 使对任意实数 P, 虽然 $\frac{|f(x_0)-f(y_0)|}{|x_0-y_0|} > P$, 但是 $|f(x_0)-f(y_0)| \geqslant \varepsilon_0$. 令

$$\alpha = |f(x_0)-f(y_0)|,$$

则存在正整数 $k > 1$, 使 $(k-1)\varepsilon_0 \leqslant \alpha < k\varepsilon_0$.

再令 $\beta = \frac{\alpha}{k-1}$, 则 $\varepsilon_0 \leqslant \beta < 2\varepsilon_0$. 不妨设 $x_0 < y_0$, 且 $f(x_0) < f(y_0)$, 由于

$$f(x_0) < f(x_0) + \beta \leqslant f(x_0) + \alpha = f(y_0),$$

故由介值性质, 存在 x_1 $(x_0 < x_1 \leqslant y_0)$, 使

$$f(x_1) = f(x_0) + \beta.$$

同样存在 x_2 $(x_1 < x_2 < y_0)$, 使

$$f(x_2) = f(x_1) + \beta.$$

依次可得 $x_0 < x_1 < \cdots < x_k$, 其中 $x_k = y_0$. 这时对任意 i $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 由于 $f(x_i) - f(x_{i-1}) = \beta \geqslant \varepsilon_0$, 据一致连续性定义, 必然 $x_i - x_{i-1} \geqslant \delta$, 从而

$$\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right| \leqslant \frac{k\beta}{k\delta} = \frac{\beta}{\delta}.$$

取 $P = \frac{2\varepsilon_0}{\delta}$, 则

$$\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right| \leqslant P,$$

矛盾.

注　问题 24 是由 Paine[62] 证明的.

25. 设 (a, b) 为有界区间. 证明: 函数 f 在 (a, b) 上一致连续的充分必要条件是: 对于 (a, b) 中的任意 Cauchy 数列 $\{x_n\}$, 函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 也是 Cauchy 数列.

证 必要性: 设 f 在 (a,b) 上一致连续, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x',x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

设 $\{x_n\}$ 是 (a,b) 中的 Cauchy 数列, 则存在正整数 n_0, 当 $m,n>n_0$ 时有 $|x_m-x_n|<\delta$, 从而

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon,$$

即 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 数列.

充分性: 假设 f 在 (a,b) 上不一致连续, 即存在 $\varepsilon_0>0$, 对 $\delta_n=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$, 分别存在 (a,b) 中的点 x_n',x_n'', 虽然 $|x_n'-x_n''|<\delta_n$, 但是

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

因 (a,b) 有界, 故 $\{x_n'\}$ 中有收敛子列 $\{x_{n_k}'\}$, 设 $x_{n_k}'\to x\ (k\to\infty)$. 易知, $x_{n_k}''\to x\ (k\to\infty)$ 也成立.

取 $x_1=x_{n_1}',x_2=x_{n_1}'',\cdots,x_{2k-1}=x_{n_k}',x_{2k}=x_{n_k}'',\cdots$, 显然, $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列, 但对任意正整数 k_0, 有

$$|f(x_{2k_0-1})-f(x_{2k_0})|\geqslant\varepsilon_0.$$

这与 $\{f(x_n)\}$ 为 Cauchy 数列的条件发生矛盾. 因此, f 在 (a,b) 上必定一致连续.

注 连续函数不必把 Cauchy 数列映成 Cauchy 数列. 例如, 在区间 $(0,1)$ 上定义函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x},$$

则 f 连续. 又, $\left\{\frac{2}{n\pi}\right\}$ 是 $(0,1)$ 中的 Cauchy 数列, 但 $\left\{f\left(\frac{2}{n\pi}\right)\right\}$ 却不是 Cauchy 数列.

26. 证明: 若 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则存在 $c\in[a,b]$, 使对一切 $x\in[a,b]$, 有 $f(c)\geqslant f(x)$.

有界闭区间上连续函数的最大值存在性定理是数学分析中最基本、最重要的定理之一. 关于这条定理的证明, 通常是据它在该区间上有界且能达到上确界来证明的. 这里介绍的两个新证明分别属于 Bernau[26] 和 Pennington[64]. 他们的证明各有特色, 而又都富于启发性.

证法 1 令

$$M=\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant f(u)\ 对一切\ u\in[a,x]\}.$$

因 $a\in M$, 故 M 非空且有上界 b. 令

$$c=\sup M.$$

任取 $x \in [a,b]$, 令

$$y = \inf\{z \in [a,b] : f(z) \geqslant f(x)\}.$$

我们证明: (i) $f(y) \geqslant f(x)$; (ii) $y \in M$; (iii) $c \in M$. 由此可知, $y \leqslant c$ 且 $f(c) \geqslant f(y) \geqslant f(x)$. 于是对一切 $x \in [a,b]$ 有 $f(c) \geqslant f(x)$.

(i) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $u \in [a,b]$ 且 $y < u < y+\delta$ 时, 有

$$|f(y) - f(u)| < \varepsilon.$$

据 y 的定义, 存在 $z \in [a,b]$ 使 $y \leqslant z < y+\delta$, 且 $f(z) \geqslant f(x)$. 因此

$$\begin{aligned} f(y) &= f(z) + f(y) - f(z) \geqslant f(z) - \varepsilon \\ &\geqslant f(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $f(y) \geqslant f(x)$.

(ii) 据 y 的定义, 不存在 u 使 $a \leqslant u < y$ 且 $f(u) \geqslant f(x)$. 因此, 若 $a \leqslant u < y$, 则

$$f(u) < f(x) \leqslant f(y),$$

故 $y \in M$.

(iii) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $z \in [a,b]$ 且 $|z-c| < \delta$ 时, 有

$$|f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

假定 $a \leqslant u < c$, 据 c 的定义, 存在 $z \in M$ 使 $u \leqslant z \leqslant c$ 且 $|z-c| < \delta$. 因此

$$\begin{aligned} f(u) \leqslant f(z) &= f(c) + f(z) - f(c) \\ &\leqslant f(c) + \varepsilon, \end{aligned}$$

可见 $f(u) \leqslant f(c)$, 从而 $c \in M$.

证法 2 令 $a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1}$ 与 b_{n+1} 以 a_n 与 b_n 如下归纳地定义: 令 $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. 若存在一个数 $u \in [a_n, c_n]$ 使对一切 $v \in [c_n, b_n]$ 有 $f(v) \leqslant f(u)$, 则令 $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$. 若不然, 即对每一 $u \in [a_n, c_n]$, 存在 $v \in [c_n, b_n]$, 使 $f(v) > f(u)$, 则令 $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$. 无论属于哪一种情形, 都有

(i) $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

(ii) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

(iii) 若 $x \in [a_n, b_n]$, 则存在数 $y \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, 使 $f(x) \leqslant f(y)$.

这样, 我们定义了一个闭区间列 $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 具有性质:

(i)$'$ 若 $n \geqslant m \geqslant 0$, 则 $a_m \leqslant a_n \leqslant b_m \leqslant b_0$.

(ii)$'$ $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

(iii)$'$ 若 $x \in [a,b], n_0$ 是非负整数, 则存在 $y \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, 使 $f(x) \leqslant f(y)$.

据 (i)$'$, 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 令 $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, 则 $c \in [a_m, b_m]$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$. 特别, $c \in [a,b]$.

兹证对每一 $x \in [a,b]$, 有 $f(x) \leqslant f(c)$.

设 $x \in [a,b]$, 并任取实数 $t > f(c)$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续且 $c \in [a,b]$, 故存在正数 δ, 使当 $y \in [a,b]$ 且 $|y-c| < \delta$ 时, 有 $f(y) < t$. 据 (ii)$'$, 可取 n_0 使 $b_{n_0} - a_{n_0} < \delta$. 于是据 (iii)$'$, 可取 $y^* \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 使 $f(x) \leqslant f(y^*)$. 由于 $c \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, 我们有

$$|y^* - c| \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < \delta.$$

因此, $y^* \in [a,b]$, 从而 $f(y^*) < t, f(x) < t$, 可见 $f(x) \leqslant f(c)$.

27. 证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 (i) f 在 $[a,b]$ 上有界; (ii) f 具有介值性质, 即若 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0) = 0$; (iii) f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

这是关于连续函数的三个著名定理. 我们这里向读者介绍的一种新的证明方法属于 Botsko[30]. 他给出了这些定理证明的一种统一处理方法, 所用的技巧是基于下述定义和引理.

定义 $[a,b]$ 的闭子区间族 C 称为 $[a,b]$ 的一个**完全覆盖**, 是指对任一 $x \in [a,b]$, 存在 $\delta(x) > 0$, 使得 $[a,b]$ 的每个含有 x 且长度小于 $\delta(x)$ 的闭子区间都属于 C.

引理 若 C 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖, 则 C 包含 $[a,b]$ 的一个分划. 即存在 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使每个 $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 都属于 C.

证 (反证法) 若 C 不包含 $[a,b]$ 的任何分划, 则通过对 $[a,b]$ 重复使用对分法可得 $[a,b]$ 的闭子区间列 $\{J_n\}$, 使 $J_n \supset J_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots), |J_n| \to 0$ $(n \to \infty)$, 且 C 不包含任何一个 J_n 的任何一个分划. 其中 $|J_n|$ 代表 J_n 的长度. 由闭区间套定理, 存在唯一 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. 若 $\delta(x)$ 如定义所述, 则因 $|J_n| \to 0$ $(n \to \infty)$, 故存在 n_0, 使 $|J_{n_0}| < \delta(x)$, 从而 $J_{n_0} \in C$. 于是, C 显然含有 J_{n_0} 的一个分划, 矛盾.

现在利用引理来证明上述问题.

(i) 令

$$C = \{I : I \text{ 是 } [a,b] \text{ 的闭子区间}, f \text{ 在 } I \text{ 上有界}\}.$$

先证 C 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 为此, 任取 $x \in [a,b]$, 因 f 在 x 连续, 故存在 $\delta(x) > 0$, 使 f 在区间 $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ 上有界 (若 $x = a$ 或 b, 则 $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ 分别换成 $[x, x + \delta(x))$ 或 $(x - \delta(x), x]$). 现设 I 是含有 x 且长度小于 $\delta(x)$ 的 $[a,b]$ 的任一闭子区间, 则 $I \subset (x - \delta(x), x + \delta(x))$. 于是 f 在 I 上有界, 从而 $I \in C$, 即 C 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 据引理, C 包含 $[a,b]$ 的一个分划. 由于 f 在分划的每个小区间上有界, 因而 f 在 $[a,b]$ 上有界.

(ii) (反证法) 设不存在 $x_0 \in (a,b)$, 使 $f(x_0)=0$. 令

$$C=\{I: I \text{ 是 } [a,b] \text{ 的闭子区间且 } f \text{ 在 } I \text{ 上同号}\},$$

则 C 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 事实上, 设 $x\in[a,b]$, 则因 f 在 x 连续且 $f(x)\neq 0$, 故存在 $\delta(x)>0$, 使 f 在 $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 上与 $f(x)$ 具有相同的符号. 若 I 是含有 x 且长度小于 $\delta(x)$ 的 $[a,b]$ 的闭子区间, 则 $I\subset(x-\delta(x),x+\delta(x))$. 因此, $I\in C$, 从而 C 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 由引理, C 包含 $[a,b]$ 的一个分划 $I_1,I_2,\cdots,I_n$. 不妨设这些小区间是按自左至右的顺序编号的, 可以看出, f 在 $[a,b]$ 上必定具有同一符号. 这与已知发生矛盾. 故必存在 $x_0\in(a,b)$, 使 $f(x_0)=0$.

(iii) 任给 $\varepsilon>0$, 令

$$C=\left\{I: I \text{ 是 } [a,b] \text{ 的闭子区间且对任意 } x,y\in I,\ \text{有 } |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

由 f 在 $[a,b]$ 上的连续性, 易证 C 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 因此, C 包含 $[a,b]$ 的一个分划 $I_1,I_2,\cdots,I_n$. 令

$$\delta=\min\{|I_k|: k=1,2,\cdots,n\}.$$

若 $[a,b]$ 中的点 x 和 y 满足 $|x-y|<\delta$, 则 x,y 或者属于以上分划的同一子区间, 或者属于两个相邻的子区间. 无论在哪种情况下, 都有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 故 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

注　数学分析中还有一些定理亦可用上述方法给出证明, 如有限覆盖定理、聚点原理等.

28. 设 f 在有界区间 (a,b) 内连续, 且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)=0.$$

证明 f 在 (a,b) 内有最大值或最小值.

证　令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x=a \text{ 或 } x=b.\end{cases}$$

则 F 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 故 F 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值, 即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$, 使

$$F(x_1)\leqslant F(x)\leqslant F(x_2)\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

当 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 的端点时, $F(x_1)=F(x_2)=0$. 这时 $F\equiv 0$, 于是 $f\equiv 0$. 因此, f 在 (a,b) 上既有最大值也有最小值, 它们都是 0.

当 $x_1\in(a,b)$ 时, $f(x_1)=F(x_1)\leqslant F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$, 从而 $f(x_1)\leqslant f(x)(a<x<b)$, 即 $f(x_1)$ 是 f 在 (a,b) 上的最小值.

同理可证, 当 $x_2 \in (a,b)$ 时, $f(x_2)$ 就是 f 在 (a,b) 上的最大值.

综上所述, f 在 (a,b) 上必有最大值或最小值.

29. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且有唯一最小值点 $x_0 \in [a,b]$. 证明: 若 $x_n \in [a,b]$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

证 (反证法) 假若不然, 则应有正数 ε_0 及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon_0.$$

因 $\{x_{n_k}\} \subset [a,b]$, 故存在收敛子列. 不妨设此子列为 $\{x_{n_k}\}$ 本身, 并记

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0' \in [a,b],$$

显然, $x_0' \neq x_0$, 但据 f 在 $[a,b]$ 上的连续性, 又应有

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0').$$

此式与 x_0 为 f 的唯一最小值点矛盾. 因此, 必有 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

30. 设 $\{f_n\}$ 为有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \cdots \geqslant f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant \cdots,$$

又, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处存在. 证明 f 在 $[a,b]$ 上必有最大值.

证 因 f_1 在 $[a,b]$ 上连续, 故有 M_0 使

$$f_1(x) \leqslant M_0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

又因函数列 $\{f_n(x)\}$ 递减且收敛于 $f(x)$, 故

$$f(x) \leqslant f_1(x) \leqslant M_0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

令

$$M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

则 $M \leqslant M_0$. 按定义, 对任何正整数 k, 有 $x_k \in [a,b]$, 使

$$f(x_k) > M - \frac{1}{k}.$$

考虑数列 $\{x_k\}$, 因其有界, 故存在收敛子列, 不妨设它本身就是收敛的, 并记其极限为 x_0, 则

$$f_n(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_n(x_k) \geqslant \lim_{k\to\infty} \left(M - \frac{1}{k}\right) = M,$$

再令 $n \to \infty$, 即得 $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \geqslant M$. 于是由 M 的定义即知 $f(x_0) = M$.

31. 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的函数, 满足条件: 对每一点 $x_0 \in [a,b]$, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对一切 $x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

证明: (i) f 在 $[a,b]$ 上有最大值; (ii) f 未必有下界.

证　(i) 先证 f 在 $[a,b]$ 上有上界. 假若不然, 则对任意正整数 n, 存在 $x_n \in [a,b]$ 而有

$$f(x_n) > n.$$

因此, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

因 $\{x_n\}$ 有界, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 令

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b].$$

由于 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$, 因而 $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$.

另一方面, 由题设, 当 $x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

因而 $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$, 矛盾.

再证 f 有最大值, 即 f 达到其上确界 β. 事实上, 按上确界的定义, 对于 $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ 而言, 存在 $x_n \in [a,b]$, 使

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant \beta.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta.$$

取 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 令

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0' \in [a,b],$$

则 $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \beta$. 因此, 对任意 $\varepsilon' > 0$, 有 $n_h > 0$, 当 $n_k > n_h$ 时, 有

$$|f(x_{n_k}) - \beta| < \varepsilon'.$$

兹证 $f(x_0') = \beta$. 因 β 是 f 在 $[a,b]$ 上的上确界, 故 $f(x_0') \leqslant \beta$. 于是, 我们只要证明 $f(x_0') < \beta$ 为不可能. 设 $f(x_0') < \beta$, 记

$$\beta - f(x_0') = \Delta > 0,$$

取 $\varepsilon' = \frac{\Delta}{10}$, 则由 $|f(x_{n_k}) - \beta| < \varepsilon'$ $(n_k > n_h)$ 得到

$$f(x_{n_k}) > \beta - \varepsilon' = f(x_0') + \Delta - \frac{\Delta}{10} = f(x_0') + \frac{9}{10}\Delta.$$

这与条件 $f(x) < f(x_0') + \varepsilon$ (x 充分接近 x_0') 发生矛盾. 因此, $f(x_0') = \beta$.

(ii) f 未必有下界. 例如, 在区间 $[0,1]$ 上, 令

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

在 $x \neq 1$ 处 f 是连续的, 故满足题设条件; 在 $x = 1$ 处, f 虽不连续, 但也满足题设条件. 然而, f 显然无下界.

32. 设 f 是 $[a,b]$ 上的上半连续函数. 证明 f 在 $[a,b]$ 上有上界.

证 (反证法)　假设 f 在 $[a,b]$ 上是上半连续的函数, 但无上界, 则存在数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, 使得

$$f(x_n) > n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha,$$

则 $\alpha \in [a,b]$, 从而 f 在点 α 上半连续. 由上半连续函数的定义, 对给定的正数 $\varepsilon_0 = 1$, 必存在 $\delta > 0$, 当 $|x - \alpha| < \delta$ ($x \in [a,b]$) 时, 恒有

$$f(x) < f(\alpha) + 1.$$

另一方面, 由于 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$, 故对上述 $\delta > 0$, 总存在正整数 K, 当 $k > K$ 时恒有 $|x_{n_k} - \alpha| < \delta$, 从而当 $k > K$ 时恒有

$$n_k < f(x_{n_k}) < f(\alpha) + 1,$$

即 $n_k < f(\alpha) + 1$ 对一切 $k > K$ 都成立, 这显然是不可能的. 故 f 在 $[a,b]$ 上必有上界.

33. 设 f 是 $[a,b]$ 上的上半连续函数. 证明存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得

$$f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

证 (反证法)　由本章问题 32 知 f 在 $[a,b]$ 上有上界, 令

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = A.$$

设 f 在 $[a,b]$ 上取不到上确界 A, 则对一切 $x \in [a,b]$, 恒有 $A - f(x) > 0$. 令

$$F(x) = \frac{1}{A - f(x)} \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

并任取 $x \in [a,b]$, 则有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\to x}} F(t) &= \overline{\lim_{t\to x}} \frac{1}{A-f(t)} = \frac{1}{\underline{\lim}_{t\to x}(A-f(t))} \\ &= \frac{1}{A-\overline{\lim}_{t\to x} f(t)} \leqslant \frac{1}{A-f(x)} = F(x).\end{aligned}$$

因此, F 在 $[a,b]$ 上是上半连续的, 从而 F 有上界. 设 β 是 F 的一个上界, 即

$$0 < F(x) = \frac{1}{A-f(x)} < \beta,$$

则 $f(x) < A - \frac{1}{\beta}(a \leqslant x \leqslant b)$. 这与 $A = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ 矛盾.

34. 设函数 f 在区间 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上至少存在某个 x, 使得 $f(x)=f(x+a)$.

证　若 $f(a)=f(0)$, 即 $f(0)=f(0+a)$, 则命题成立.

现设 $f(a)\neq f(0)=f(2a)$. 不妨再设 $f(a)>f(0)$. 考虑函数

$$F(x)=f(x)-f(x+a) \quad (0\leqslant x\leqslant a).$$

因 f 在 $[0,2a]$ 上连续, 故 F 在 $[0,a]$ 上亦连续, 而且

$$\begin{aligned}F(0)&=f(0)-f(a)<0,\\ F(a)&=f(a)-f(2a)>0.\end{aligned}$$

由连续函数介值定理, 存在 $x\in(0,a)$, 使 $F(x)=0$, 即 $f(x)=f(x+a)$.

35. 设 f 在 (a,b) 内连续, 又设有数列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset(a,b), x_n\to a, y_n\to a$ $(n\to\infty)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n)=B.$$

证明对 A,B 之间的任意实数 μ, 存在数列 $\{z_n\}\subset(a,b), z_n\to a$ $(n\to\infty)$, 使得 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\mu$.

证　不妨设 $A<\mu<B$. 因 $f(x_n)\to A, f(y_n)\to B$ $(n\to\infty)$, 故对充分大的 n_0, 有

$$f(x_n)<\mu<f(y_n) \quad (n\geqslant n_0).$$

据连续函数介值定理, 在 x_n, y_n 之间有一实数 z_n $(n\geqslant n_0)$, 使 $f(z_n)=\mu$. 这样由 $y_n\to a, x_n\to a$ 知 $z_n\to a$ $(n\to\infty)$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\mu, \text{ 且 } z_n\to a \quad (n\to\infty).$$

36. 设 f 是 $(a,+\infty)$ 上有界的连续函数. 证明对任意实数 T, 存在数列 $\{x_n\}$, 使 $x_n \to \infty\ (n\to\infty)$, 而且

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证 令 $T(x)=f(x+T)-f(x)$.

(i) 若对充分大的 X, 恒有

$$T(x)\geqslant 0 \quad (x>X),$$

则当 $x>X$ 时, $f(x+T)\geqslant f(x)$. 令

$$x_0=x+1, x_1=x_0+T,\cdots,x_n=x_{n-1}+T,\cdots,$$

于是 $x_n\to\infty\ (n\to\infty)$, 而且

$$f(x_n)=f(x_{n-1}+T)\geqslant f(x_{n-1}).$$

因此 $\{f(x_n)\}$ 是递增有界数列, 从而有极限 L. 又

$$T(x_n)=f(x_n+T)-f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n) \quad (n=1,2,\cdots),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=\lim_{n\to\infty}[f(x_{n+1})-f(x_n)]=0.$$

(ii) 若存在 $X>0$, 使当 $x>X$ 时 $T(x)\leqslant 0$, 则可用类似方法证明.

(iii) 若存在数列 $\{x_n'\},\{x_n''\}$, 使 $x_n'\to\infty, x_n''\to\infty(n\to\infty)$, 但是

$$T(x_n')>0,\quad T(x_n'')<0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

则由连续函数介值定理, 存在 $x_n(x_n'\leqslant x_n\leqslant x_n'')$, 使得 $T(x_n)=0(n=1,2,\cdots)$, 且 $x_n\to\infty(n\to\infty)$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

37. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续满射, $x_1\in[0,1], x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛于 f 的不动点的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

证 容易证明, 若 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续满射, 则 f 在 $[0,1]$ 上必有**不动点**, 即存在 $x_0\in[0,1]$ 而有 $f(x_0)=x_0$.

对 $x_1\in[0,1]$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)$, 称 $\{x_n\}$ 为 f 的**逐次逼近数列**. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则它显然收敛于 f 的不动点.

Chu 和 Moyer[33] 于 1966 年给出了 f 的逐次逼近数列的各种收敛特征.

Hillam[47] 于 1976 年给出了 f 的逐次逼近数列另一收敛特征如下:

设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是连续满射, $x_1\in[0,1],\{x_n\}$ 是 f 的逐次逼近数列, 则 $\{x_n\}$ 收敛于 f 的不动点的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

必要性: 设 $\{x_n\}$ 收敛于 f 的不动点, 则显然有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

充分性: 设 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. 如果 $\{x_n\}$ 不收敛, 那么, 由于 $[0,1]$ 是紧的, 故存在 $\{x_n\}$ 的两个子列, 它们分别收敛于 ζ_1 与 $\zeta_2(\zeta_1\neq\zeta_2)$, 不妨设 $\zeta_1<\zeta_2$. 于是, 只要证明对一切 $x\in(\zeta_1,\zeta_2)$, 都有 $f(x)=x$, 从而由 f 的连续性而导致矛盾.

现在就来证明对一切 $x\in(\zeta_1,\zeta_2)$, 都有 $f(x)=x$.

假如不然, 则存在 $x^*\in(\zeta_1,\zeta_2)$, 使 $f(x^*)\neq x^*$. 于是, 由 f 的连续性可知, 存在 $\delta>0$, 使对一切 $\overline{x}\in(x^*-\delta,x^*+\delta)([x^*-\delta,x^*+\delta]\subset(\zeta_1,\zeta_2))$, 都有 $f(\overline{x})\neq\overline{x}$. 不妨设

$$\overline{x}-f(\overline{x})>0. \tag{1}$$

据题设, 可取充分大的 n_0, 使当 $n\geqslant n_0$ 时, 都有

$$|f^n(x)-f^{n+1}(x)|<\delta,$$

这里 $f^n(x)=f(x_n)=x_{n+1},f^{n+1}(x)=f(x_{n+1})=x_{n+2}$. 由于 $[x^*-\delta,x^*+\delta]\subset(\zeta_1,\zeta_2),\zeta_1<x^*<\zeta_2$, 且 ζ_2 是 $\{x_n\}$ 的聚点, 故必有正整数 $n>n_0$, 使

$$f^n(x)=x_{n+1}>x^*.$$

令 n_1 为满足上述条件的最小正整数, 则显然有

$$f^{n_1-1}(x)=x_{n_1-1}<x^*<x_{n_1}=f^{n_1}(x).$$

由于 $f^{n_1}(x)-f^{n_1-1}(x)<\delta$, 故由不等式 (1), 得到

$$f^{n_1-1}(x)-f^{n_1}(x)>0,$$

从而 $f^{n_1}(x)<f^{n_1-1}(x)<x^*$. 矛盾.

注　Smart[76] 指出, 这一结果不能推广到高于一维的欧氏空间.

38. 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的递增函数, 且 $f(a)\geqslant a,f(b)\leqslant b$. 证明 f 在 $[a,b]$ 上存在不动点, 即存在 $x_0\in[a,b]$, 使 $f(x_0)=x_0$.

证　令 $F=\{x:a\leqslant x\leqslant b\text{ 且 }f(x)\geqslant x\}$. 据题设, $a\in F$. 因 F 是有界数集, 故存在上确界. 令

$$x_0=\sup F=\sup\{x:x\in F\},$$

则 $a \leqslant x_0 \leqslant b$. 兹证 $f(x_0) = x_0$. 事实上, 当 $x \in F$ 时, 有 $x \leqslant x_0$. 而 f 递增, 故 $f(x) \leqslant f(x_0)$. 又因 $x \in F$, 故 $x \leqslant f(x)$, 从而 $x \leqslant f(x_0)$. 于是, $f(x_0)$ 是 F 的一个上界, 故

$$x_0 \leqslant f(x_0). \tag{1}$$

另一方面, 因 f 递增, 故由 $a \leqslant x_0 \leqslant f(x_0) \leqslant f(b) \leqslant b$ 可知,

$$f(x_0) \leqslant f[f(x_0)].$$

因此, $f(x_0) \in F$. 而 x_0 是 F 的上确界, 故有

$$f(x_0) \leqslant x_0, \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知, $f(x_0) = x_0$.

39. 设函数 f 满足 (i) $-\infty < a \leqslant f(x) \leqslant b < +\infty$.

(ii) $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$ $(0 < K < 1, x, y \in [a, b])$. 再设 $x_1 \in [a, b]$, 并令 $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 存在, 且 $f(x_0) = x_0$.

证法 1 先证 f 的不动点存在. 由 (ii) 知 f 在 $[a, b]$ 上连续. 考虑函数

$$g(x) = f(x) - x,$$

则 g 在 $[a, b]$ 上也连续, 且据 (i), 有

$$g(a) = f(a) - a \geqslant 0,$$
$$g(b) = f(b) - b \leqslant 0.$$

若上述两式中的等号有一个成立, 则 $f(a) = a$ 或 $f(b) = b$, 从而存在不动点.

今设上述两式中的等号均不成立, 即 $g(a) > 0, g(b) < 0$, 于是, 由连续函数介值定理, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使 $g(x_0) = 0$, 即

$$f(x_0) = x_0.$$

次证 f 的不动点是唯一的. 若存在 $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$, 使 $f(x_1) = x_1, f(x_2) = x_2$, 则由 (ii) 可知

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

这是矛盾的.

最后证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. 由于

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - x_0| &= |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant K|x_n - x_0| \\ &\leqslant K^2|x_{n-1} - x_0| \leqslant \cdots \leqslant K^n|x_1 - x_0| \quad (0 < K < 1),\end{aligned}$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

证法 2 取定 $x \in [a,b]$, 做数列

$$f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f[f_n(x)] \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

我们要证明存在 $x_0 \in [a,b]$, 使 $f(x_0) = x_0$, 且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x_0.$$

由 (i), $a \leqslant f_n(x) \leqslant b$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 用归纳法可证对一切 n 及 $x \in [a,b]$, 均有

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant K^n |f_1(x) - x|. \tag{1}$$

事实上, 当 $n = 1$ 时, $f_1(x) \in [a,b]$, 故由 (ii) 得

$$|f_2(x) - f_1(x)| = |f[f_1(x)] - f(x)| \leqslant K|f_1(x) - x|.$$

设当 $n = m$ 时, 不等式 (1) 成立.

当 $n = m+1$ 时, 由于 $f_m(x), f_{m+1}(x) \in [a,b]$, 并由归纳法的假设, 得到

$$|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leqslant K^m |f_1(x) - x|.$$

从而

$$\begin{aligned} |f_{m+2}(x) - f_{m+1}(x)| = |f[f_{m+1}(x)] - f[f_m(x)]| &\leqslant K|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \\ &\leqslant K^{m+1}|f_1(x) - x|. \end{aligned}$$

因此, 对一切 n, 不等式 (1) 成立. 此时

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leqslant |f_1(x) - x| \sum_{m=1}^{\infty} K^m.$$

由于 $0 < K < 1$, 因而级数 $\sum_{m=1}^{\infty} K^m$ 收敛. 于是, 级数 $\sum_{m=1}^{\infty} |f_{m+1}(x) - f_m(x)|$ 收敛, 故 $\sum_{m=1}^{\infty}(f_{m+1}(x) - f_m(x))$ 也收敛, 从而

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x_0$$

存在, 且 $a \leqslant x_0 \leqslant b$. 因

$$\begin{aligned} |f(x_0) - x_0| &\leqslant |f(x_0) - f_{n+1}(x)| + |f_{n+1}(x) - x_0| \\ &\leqslant K|x_0 - f_n(x)| + |f_{n+1}(x) - x_0| \\ &\to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

故 $f(x_0) = x_0$.

证法 2 应用了无穷级数的知识 (参看第五章).

40. 设函数 f 满足条件:

(i) $-\infty < a \leqslant f(x) \leqslant b < +\infty$.

(ii) $|f(x)-f(x')| \leqslant L|x-x'|$ $(0<L<1, x', x \in [a,b])$.

任取 $x_1 \in [a,b]$, 令 $x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且若 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, 则有 $f(x_0)=x_0$.

证 由 (i) 知 $a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n=1,2,\cdots)$. 由 (ii) 得

$$\begin{aligned}
|x_3-x_2| &= \frac{1}{2}|(x_2-x_1)+f(x_2)-f(x_1)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left\{|x_2-x_1|+|f(x_2)-f(x_1)|\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\{|x_2-x_1|+L|x_2-x_1|\} = \frac{1+L}{2}|x_2-x_1|, \\
|x_4-x_3| &= \frac{1}{2}|(x_3-x_2)+f(x_3)-f(x_2)| \\
&\leqslant \frac{1+L}{2}|x_3-x_2| \leqslant \left(\frac{1+L}{2}\right)^2|x_2-x_1|.
\end{aligned}$$

一般,

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-1}|x_2-x_1|.$$

因 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+L}{2}\right)^k$ 收敛, 故可证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 数列, 从而收敛. 令

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

由 (ii) 可知 f 连续, 故在 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\{x_n + f(x_n)\}$ 两端取极限, 即得 $f(x_0)=x_0$.

41. 设 f, g 在 (a,b) 内连续, 且 f 或 g 递减. 假定某个数列 $\{x_n\}$ 满足 $f(x_n) = g(x_{n-1})$, 且在 (a,b) 中有极限点. 证明方程 $f(x)=g(x)$ 在 (a,b) 内有解 ([22], 1966, pp. 669–670).

证 (反证法) 设对一切 $x\in(a,b), f(x)\neq g(x)$. 不失一般性, 可设 $f(x)>g(x)$ $(a<x<b)$. 设 x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限点, $x_0\in(a,b)$, 则存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

由 $g(x_0)<f(x_0)$ 可知存在正整数 p, 使当 $k_1, k_2 \geqslant p$ 时, 有

$$g(x_{n_{k_1}}) < f(x_{n_{k_2}}). \tag{1}$$

另一方面, 对某个正整数 $m, n_{p+1}=n_p+m$, 有

$$\begin{aligned} f(x_{n_{p+1}}) &= g(x_{n_{p+1}-1}) < f(x_{n_{p+1}-1}) \\ &= g(x_{n_{p+1}-2}) < f(x_{n_{p+1}-2}) \\ &< \cdots < f(x_{n_{p+1}-(m-1)}) = g(x_{n_p}), \end{aligned}$$

这与 (1) 矛盾. 因此, 方程 $f(x)=g(x)$ 在 (a,b) 内必有解.

42. 证明: 不存在 R^1 到 R^1 的连续函数, 它在无理数集上是一对一的, 但并不是处处一对一的.

可以构造 R^1 到 R^1 的连续函数, 它在有理数集上是一对一的, 但并非处处是一对一的 (参看 [79], p, 59). 自然要问: 可否把有理数集代以无理数集? White[78] 指出, 不能.

证 (反证法) 假如存在这样的连续函数 f, 那么由于它并非处处一对一, 故存在有理数 $a<b$, 使得 $f(a)=f(b)=h$.

集 $A=\{x\in[a,b]: f(x)=h\}$ 在 $[a,b]$ 中并不稠密, 因为否则 f 在 $[a,b]$ 上将为常值函数. 于是, 存在 A 中两点 $a'<b'$, 使在 (a',b') 中没有 A 的点. 据连续函数介值定理, 开区间 (a',b') 的像 $f((a',b'))$ 中的元或者都大于 h, 或者都小于 h. 假如是前者 (后者类似), 则

$$f([a',b'])=[h,f(m)],$$

其中 $h<f(m), m\in(a',b')$. 于是

$$f([a',m])=f([m,b'])=[h,f(m)].$$

因 f 在无理数集上是一对一的, 故由上式可知, f 必映 $[a',m]$ 的无理点到 $[m,b']$ 的有理点的像上. 这样一来, 一个不可数集的一对一映射到一个可数集上, 这是不可能的.

43. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明: 若 f 在 $[a,b]$ 上处处取得局部极值, 则 f 必为常值函数.

证 (反证法) 若存在 $a_1,b_1\in[a,b], a_1<b_1$, 使 $f(a_1)<f(b_1)$, 则由连续函数介值定理, 存在 a_2,b_2, 使 $a_1<a_2<b_2<b_1, f(a_1)<f(a_2)<f(b_2)<f(b_1), b_2-a_2<\frac{b_1-a_1}{2}$. 如此继续下去, 得到数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 满足

(i) $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$;

(ii) $f(a_1)<f(a_2)<\cdots<f(a_n)<\cdots<f(b_n)<\cdots<f(b_2)<f(b_1)$;

(iii) $b_n-a_n<\frac{b-a}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$.

由闭区间套定理, 得到

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=x_0.$$

显然, x_0 不是 f 的局部极值点, 与题设矛盾.

反 例

1. 函数 f, 对于它, 存在函数 g 使 $g\circ f=I$, 而不存在函数 h, 使 $f\circ h=I$.

设

$$g(u)=\begin{cases}u, & u\leqslant 0,\\ u-1, & u>0,\end{cases}$$

$$u=f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

则 $g[f(x)]=x$, 即 $g\circ f=I$.

另一方面, 不存在函数 h, 使 $f\circ h=I$.

事实上, 如果存在 h 使 $f\circ h=I$, 那么对任意实数 b, 令 $a=h(b)$, 就得到

$$b=f(a).$$

然而, 对于函数 f 而言, 它的值域是由一切 $u\leqslant 0$ 及 $u>1$ 的实数所组成, 当 $b\in(0,1)$ 时, 就不存在 a 而有 $b=f(a)$. 由此导致矛盾, 故不存在函数 h 而有 $f\circ h=I$.

注 这个例子也说明了在一般情况下 f 和 g 的复合与 g 和 f 的复合是不同的.

2. 函数 f, 它在 x_0 的任何邻域内都是无界的, 但当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 并不趋于无穷大.

设

$$f(x)=\frac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x},$$

则对无论多大的正数 M, 总有充分接近于 $x=0$ 的点, 使 $\left|\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|>M$. 例如, 取 $x=\frac{1}{n\pi}$, 则 $\left|\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|=n\pi$, 故当 $n>\frac{M}{\pi}$ 时, 就有

$$\left|\frac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right|>M.$$

因此, 函数 f 在 $x=0$ 的任何邻域内都是无界的.

然而, 若取 $x_n=\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, 则当 $n\to\infty$ 时, $x_n\to 0$, 此时 $\frac{\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)}{x_n}\to 0$, 即 f 并不趋于无穷大.

注 无界函数的定义与函数趋于无穷大的定义有些相似. 然而, 这两个概念有本质上的差别. 若 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to\infty$, 则 f 在 x_0 的每个邻域内必定无界. 上述反例说明这个命题之逆并不成立.

3. 没有最小正周期的非常值周期函数.

容易证明, 若 $r\neq 0$ 是函数 f 的周期, 则 $-r$ 也是 f 的周期, $nr\ (n=1,2,\cdots)$ 也是 f 的周期. 由此可见, 周期函数的一切周期组成了一个关于原点成对称的无穷集合. 因此, 对周期函数的周期进行研究时, 只要研究其正周期就够了.

即使对于定义在整个数轴上的周期函数的所有正周期而言, 并不是都有最小的. 例如, 定义在整个数轴上处处不连续的 Dirichelet 函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

任一有理数 $r>0$ 均是它的周期. 事实上, 若 x 是无理数, 则 $x+r$ 也是无理数, 故 $f(x+r)=f(x)=0$; 又若 x 是有理数, 则 $x+r$ 也是有理数, 故仍有 $f(x+r)=f(x)=1$. 因正有理数集无最小数, 故 Dirichelet 函数无最小正周期.

注　对连续的周期函数来说, 也未必有最小正周期. 例如, 常值函数 $f(x)\equiv C$, 一切正实数都是它的正周期. 因一切正实数中无最小者, 故常值函数无最小正周期.

颜怀曾 [19] 指出, 任一非常值的连续周期函数必有最小正周期.

郑格于 [11] 进一步指出, 若非常值的周期函数至少有一个连续点, 则该函数必有最小正周期. 因此, 没有最小正周期的非常值周期函数必定是无处连续的.

4. 一个无处连续的非常值周期函数, 它具有最小正周期.

我们知道, 没有最小正周期的非常值的周期函数必定是无处连续的 (参看本章反例 3 的注). 然而, 我们也可做出一个无处连续的非常值的周期函数, 它具有最小正周期. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 2n\leqslant x<2n+1\text{ 且 }x\text{ 为无理数},\\ -1, & 2n\leqslant x<2n+1\text{ 且 }x\text{ 为有理数},\\ 2, & 2n+1\leqslant x<2(n+1)\text{ 且 }x\text{为无理数},\\ -2, & 2n+1\leqslant x<2(n+1)\text{ 且 }x\text{为有理数},\end{cases}$$

这里, n 为整数. 显然, f 的最小正周期是 2, 它是一个无处连续的函数.

5. 一个没有最小正周期的周期函数, 它的值域是可数集.

令

$$f(x)=\begin{cases}n, & x\text{ 为 }n\ (n\geqslant 1)\text{ 次的既约有理方程的根},\\ 0, & x\text{ 为超越数}.\end{cases}$$

可以证明, 对任意有理数 r 有 $f(x+r)=f(x)$.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 次的既约有理方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根, 则可构造一个 n 次有理方程使 $\alpha_1+r,\alpha_2+r,\cdots,\alpha_n+r$ 是它的根, 并且可以证明这个方程是既约的, 否则设 α_1+r 是适合 m 次 $(m<n)$ 既约有理方程的根, 则又可

构造一 m 次有理方程使 $\alpha_1+r+(-r)$ 是它的根. 于是 α_1 是 m 次有理方程的根, 则必导致与 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 是既约的假定矛盾①. 于是当 x 是 n 次既约有理方程的根时, 恒有

$$f(x+r)=f(x)=n.$$

然而正有理数 r 没有最小数, 故 f 没有最小正周期.

容易证明含有实根的任一 n 次有理既约方程是存在的, 如 $x^n=c, c$ 是一个正有理数但 c 不是有理数的 n 次幂就是一例. 故 f 的值域是一切非负整数, 从而它是一个可数集.

6. 一个没有最小正周期的周期函数, 它的值域是不可数集.

将实数轴上的点分类. 两点 x 与 y 称为属于同一类, 当且仅当 $x-y$ 是有理数时. 在每一类中任意选定一点作为代表元素. 于是对于每一 x 将具有形式 $x+r$ (r 是有理数) 的点的全体归为一类 $K_{x_0}(x), x_0$ 表示这一类的代表元素. 可以证明

(i) 不同的两类 $K_{x_0}(x)$ 与 $K_{y_0}(y)$ 是不相交的.

(ii) 所有代表元素的全体记为集合 A, 则 A 为一不可数集.

做函数 f : 令 $f(x_\zeta)=x_0, x_\zeta\in K_{x_0}(x)$. 则对任意有理数 r, 因为 $x\zeta$ 和 $x\zeta+r$ 同在一类, 所以

$$f(x_\zeta+r)=f(x_\zeta)=x_0.$$

从而, 任意有理数 r 是 f 的周期, 所以 f 没有最小正周期.

由于 A 是不可数集, 得 f 的值域是不可数集.

反例 4 至反例 6 都是由郑格于 [11] 做出的.

7. 存在两个周期函数, 其和不是周期函数.

$\sin x$ 与 $\sin\alpha x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数, 其中 α 为无理数. 现证 $\sin x+\sin\alpha x$ 不是周期函数.

事实上, 假如 $\sin x+\sin\alpha x$ 是具有非零周期 T 的周期函数, 那么下列恒等式对于一切实数 x 都成立:

$$\begin{aligned}
&\sin(x+2T)+\sin(\alpha x+2\alpha T)=\sin x+\sin\alpha x,\\
&\sin(x+2T)-\sin x=-[\sin(\alpha x+2\alpha T)-\sin\alpha x],\\
&\cos(x+T)\sin T=-\cos(\alpha x+\alpha T)\sin\alpha T,\\
&\cos x\sin T=-\cos\alpha x\sin\alpha T.
\end{aligned}$$

若令 $x=\frac{1}{2}\pi$, 则最后一个方程的左端将变成零, 于是 $\sin\alpha T=0$, 因而 αT 是 π 的倍数. 若令 $\alpha x=\frac{1}{2}\pi$, 该式的右端将变成零, 于是 $\sin T=0$, 因而 T 是 π 的倍数. 因为 α 是无理数, 所以这是不可能的, 从而导致预期的矛盾.

① 这里只要用到根与系数的关系的 Vieta 公式和对称多项式的基本定理.

8. 两个具有不同周期的周期函数, 其和仍是一个周期函数.

下面的例子是由 Denniston[37] 做出的.

设 a, b, c 是两两不同的实数, 对实数 x, 令

$$d(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0,\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x-ma-nb)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x-ma-nc),$$

$$g(x)=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x-mb-nc)-\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} d(x-ma-nb).$$

易见, 函数 f, g 分别具有周期 a, b, 而函数 $f+g$ 具有周期 c.

注 对于两个具有同一周期 t 的函数 f 与 g, 显然, 它们的和、差、积、商均以 t 为周期的函数, 这个条件等价于函数 f 有一周期 t_1 与 g 的某一周期 t_2 是**可公度**的, 即 $\frac{t_1}{t_2}$ 为有理数. 于是便产生问题: 要使两个周期函数的和、差、积、商仍为周期函数, 是否它们必须有可公度的周期? 李继闵 [10] 和宣立新 [14] 指出, 这些问题的答案全是否定的, 有兴趣的读者, 可参看他们的原文.

9. 一个非周期函数 f, 使 $|f|$ 是周期函数.

容易证明, 若 f 是周期函数, 则 $|f|$ 亦必为周期函数, 应当注意, 这个命题之逆不真, 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\\ |\sin x|, & x<-\pi \text{ 或 } x>2\pi,\end{cases}$$

则 $|f|$ 是周期函数而 f 不是周期函数.

注 容易证明, 两个周期函数的复合函数仍为周期函数, 但是, 也存在周期函数 f 与非周期函数 g, 使复合函数 $f\circ g$ 是周期函数. 例如, 设 $f(u)=\sin u, u=g(x)=ax+b$, 则 f 是周期函数而 g 不是周期函数, 其复合函数 $f[g(x)]=\sin(ax+b)$ 是周期函数.

10. 在某点对称连续而不连续的函数.

称函数 f **在** x_0 **是对称连续**的, 是指

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0.$$

若 f 在每一点 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是对称连续的, 就说 f **在** $(-\infty,+\infty)$ **上对称连续**.

容易证明, 若函数 f 在点 x_0 处连续, 则其亦必在该点对称连续, 但逆命题并不成立, 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

则当 x_0 为有理数时, 就有

$$\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0,$$

即 f 在任一有理点都是对称连续的, 然而, f 是无处连续的.

注 Fried 证明了每个在 $(-\infty,+\infty)$ 上的对称连续函数必在 $(-\infty,+\infty)$ 的某个稠密子集上连续. 1971 年, David[34] 进一步指出, 对称连续函数必定是几乎处处连续的, 即不连续点所组成之集是一个零测集. David 还构造了 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个对称连续函数 f, 使 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 的某个不可数子集上无处连续.

11. 处处有限而又处处局部无界的函数.

设

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\dfrac{m}{n}, m \text{ 和 } n \text{ 是互素的整数, 且 } n>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

则 f 在每一点 $x_0\in R^1$ 有定义, 且在该点的函数值有限, 然而, f 在点 x_0 并不局部有界, 事实上, 假如存在 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$, 使 f 在其上是有界的, 则 $U(x_0,\delta)$ 内全体 $\frac{m}{n}$ 的分母 n 有界, 从而分子 m 也将有界. 但是这只能许可有限多个有理数在邻域 $U(x_0,\delta)$ 内, 这与有理数的全体在 R^1 内稠密的性质发生冲突. 因此, f 在 $U(x_0,\delta)$ 上不可能是有界的.

12. 一个无处连续函数, 其绝对值却处处连续.

函数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,}\\ -1, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 R^1 上无处连续, 但 $|f(x)|\equiv 1$ 在 R^1 上处处连续.

注 容易证明, 若 f 在集 E 上连续, 则 $|f|$ 在 E 上亦必连续, 上述反例说明了这个陈述反过来是不正确的.

13. 有唯一个连续点的函数

设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \text{ 为有理数,}\\ -x, & x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

则 f 仅有的连续点是 $x=0$.

14. 关于乘积函数连续性的例子.

关于乘积函数的连续性, 我们熟知定理: 若函数 f 与 g 在 x_0 处皆连续, 则 fg 在 x_0 处亦连续, 但当 f 与 g 在 x_0 处不同时连续时, 可以有下述各种不同情况.

(a) 函数 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 连续. $g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0; g(0)=0$ 在 $x=0$ 处不连续. 由于

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0=f(0)g(0),$$

故 fg 在 $x=0$ 连续.

(b) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 连续, $g(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0, g(0)=0$ 在 $x=0$ 不连续. 其积 fg 在 $x=0$ 不连续.

(c) 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} -1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

则 f 与 g 在 $x=0$ 处皆不连续. 然而,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)&=\lim_{x\to 0-} x\cdot(-1)=0,\\ \lim_{x\to 0+} f(x)g(x)&=\lim_{x\to 0+} 1\cdot x=0,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=0=f(0)g(0),$$

即 fg 在 $x=0$ 连续.

(d) 设 $f(x)=g(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0; f(0)=g(0)=0$. 则 f 与 g 在 $x=0$ 处皆不连续, 其积在 $x=0$ 处亦不连续.

综上所述, 可列出下表 (表 2–1).

表 2–1

	f 在 $x=x_0$	g 在 $x=x_0$	fg 在 $x=x_0$	例
1	连　续	连　续	连　续	定理
2	连　续	不连续	连　续	(a)
3	连　续	不连续	不连续	(b)
4	不连续	不连续	连　续	(c)
5	不连续	不连续	不连续	(d)

15. 关于复合函数连续性的例子.

关于复合函数的连续性, 我们熟知定理: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 连续, 则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 连续. 但当 $g(y)$ 在 $y=y_0, f(x)$ 在 $x=x_0$ 不同时连续时, 可以有下述各种不同的结果.

(a) 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 为互素的整数, 且 } q>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为有理数,}\\ 0, & y \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

则 f 在 $x=0$ 连续, g 在 $f(0)$ 不连续, 而复合函数 $g[f(x)]\equiv 1$ 在 $x=0$ 连续.

(b) 设 $f(x)=x^2$, 再设

$$g(y)=\begin{cases}y, & y\leqslant 1,\\ 3y-5, & y>1.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, $g(y)$ 在 $f(1)=1$ 不连续. 因为

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 3x^2-5, & |x|>1,\end{cases}$$

所以复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=1$ 不连续.

(c) 函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 不连续, $g(y)=y(1-y^2)$ 在 $y=0$ 连续, 因

$$g[f(x)]=(\operatorname{sgn} x)(1-\operatorname{sgn}^2 x)\equiv 0,$$

故 $g[f(x)]$ 在 $x=0$ 连续.

(d) 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数,}\\ 0, & x \text{ 为无理数,}\end{cases}\qquad g(y)=y,$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(0)=1$ 连续, 而复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数,}\\ 0, & x \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

在 $x=0$ 不连续.

(e) 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数, 且 } q>0,\\ 1, & x \text{ 为无理数或 } x=0,\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为有理数,}\\ 0, & y \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(0)=1$ 也不连续, 然而 $g[f(x)]\equiv 1$ 连续.

(f) 设 $f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0, f(0)=0; g(y)=\operatorname{sgn} y$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续, $g(y)$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不连续, 复合函数 $g[f(x)]=\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 也不连续.

综上所述, 可列出下表 (表 2–2).

表 2–2

	$f(x)$ 在 $x=x_0$	$g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$	$g[f(x)]$ 在 $x=x_0$	例
1	连　续	连　续	连　续	定理
2	连　续	不连续	连　续	(a)
3	连　续	不连续	不连续	(b)
4	不连续	连　续	连　续	(c)
5	不连续	连　续	不连续	(d)
6	不连续	不连续	连　续	(e)
7	不连续	不连续	不连续	(f)

16. 函数 $y=f(u), u=g(x)$ 适合 $\lim_{u\to A} f(u)=B, \lim_{x\to a} g(x)=A$, 但 $\lim_{x\to a} f[g(x)]$ 不存在.

设

$$f(u)=\begin{cases}1, & u\neq 0,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数, 且} q>0,\\[2ex] 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

显然, $\lim_{u\to 0} f(u)=1, \lim_{x\to 0} g(x)=0$. 但是, 若取 x 为无理数, 则 $g(x)=0$, 从而

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)]=0.$$

若取 x 为有理数, $x=\frac{p}{q}$, 则 $g(x)=\frac{1}{q}$, 从而

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)]=1.$$

可见 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]$ 不存在.

注　我们有如下的命题: 若满足下列两条件之一:

(i) $f(u)$ 在 u_0 连续, $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$,

(ii) $\lim_{u\to u_0} f(u)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 但在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内, 当 $x\neq x_0$ 时 $g(x)\neq u_0$, 那么

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

这个定理具有很重要的意义, 我们时常对自变量做代换来求极限, 其实是基于这个定理的. 例如, 求 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 时, 做代换 $u=g(x)$, 而由 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$, 把求 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 的问题化为求极限 $\lim_{u\to u_0} f(u)$. 上述反例表明, 这样做代换, 并不是永远通行无阻的, 还必须注意定理的条件. 因此, 在讨论 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]$ 时, 不考虑定理的条件而轻易地做代换 $u=g(x)$, 并从 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ 和 $\lim_{u\to 0} f(u)=1$ 来断定

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)] = \lim_{u\to 0} f(u) = 1,$$

那就是错误的.

Pamankutty 和 Vamanamurthy[63] 进一步指出, 若 $\lim_{x\to a} g(x)=A, \lim_{u\to A} f(u)=B$, 则或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]=B$, 或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]=f(A)$, 或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]$ 不存在.

证 任给 $\varepsilon>0$, 则存在 $\gamma>0$ 和 $\delta>0$, 使当 $0<|u-A|<\gamma$ 时

$$|f(u)-B|<\varepsilon,$$

而当 $0<|x-a|<\delta$ 时

$$|g(x)-A|<\gamma.$$

(i) 若存在 a 的邻域 $U(a)$, 使对任何 $x\in U(a)\backslash\{a\}$, 都有 $g(x)\neq A$, 则可选取 δ 使 $(a-\delta, a+\delta)\subset U(a)$, 从而当 $0<|x-a|<\delta$ 时, 有 $0<|g(x)-A|<\gamma$, 故

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = B.$$

(ii) 若 (i) 不成立, 则对 a 的每个邻域 $U(a)$, 对某个 $x\in U(a)\backslash\{a\}$, 有 $g(x)=A$. 由此可知, 或者

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = f(A),$$

或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]$ 不存在.

17. 函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$, 其复合函数 $f[g(x)]$ 处处连续, 并适合

$$\lim_{u\to b} f(u)=c, \quad \lim_{x\to a} g(x)=b, \quad \lim_{x\to a} f[g(x)]\neq c.$$

设

$$f(u)=\begin{cases} 0, & u\neq 0, \\ 1, & u=0, \end{cases} \qquad g(x)\equiv 0,$$

则 $\lim_{u\to 0} f(u)=0$. 然而, 对于一切 $x, f[g(x)]\equiv 1$, 所以 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]=1$.

注 如果再附加条件: $x\neq a$ 蕴涵 $g(x)\neq b$, 那么这个反例就变成不可能的了.

18. 存在连续函数列 $\{f_n(x)\}$, 其上确界函数 $f(x)=\sup_n f_n(x)$ 并不连续.

在 R^1 上如下定义函数 f_n :

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ nx, & 0<x\leqslant \dfrac{1}{n},\\ 1, & x>\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

易见, 函数 f_n 在 R^1 上都连续, 然而上确界函数

$$f(x)=\sup_n f_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 间断.

注　可以证明, 如果定义在点集 E 上的有限多个函数 $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 在点 $x_0\in E$ 都连续, 那么最大值函数

$$f(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)$$

及最小值函数

$$g(x)=\min_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)$$

在点 x_0 也连续, 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个函数的情形.

19. 一个无处连续函数, 其反函数却处处连续.

令

$$c_1=\frac{1}{2},c_2=\frac{1}{4},c_3=\frac{3}{4},c_4=\frac{1}{8},c_5=\frac{3}{8},c_6=\frac{5}{8},\cdots,$$

一般, 分母是 2^n, 分子是小于分母的正奇数. 再令

$$a_1=\frac{1}{3},a_2=\frac{2}{3},a_3=\frac{1}{4},a_4=\frac{3}{4},a_5=\frac{1}{5},a_6=\frac{4}{5},\cdots,$$

一般是 $\frac{1}{k}$ 及 $\frac{k-1}{k}$. 显然 $\{c_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 是一一对应的, 令 $f(c_n)=a_n$, 易见, f 在任何点的上极限是 1, 下极限是 0. 因此, f 在任何点都不连续, 但其反函数 $g(a_n)=c_n$ 在每一点都连续.

注　设 $\{c_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 是反例 19 中的数列. 若令 $f(a_n)=c_n$, 则 f 在每一点 a_n 都连续, 而其反函数 $g(c_n)=a_n$ 却无处连续.

20. 有界区间上的一个一对一的连续函数, 其反函数不连续.

考虑函数

$$g(x)=(\cos x,\sin x),\quad 0\leqslant x<2\pi.$$

则 g 是一个从区间 $J=[0,2\pi)$ 映到 R^2 中的单位圆的圆周 C 上的一对一的连续函数. 但这时 g^{-1} 是把圆周 C 映到区间 J 上, 因此它不可能是连续的, 因为要把圆周展开在一个区间上, 就必须 "破开" 这圆周. 事实上我们看到, g^{-1} 把 $(1,0)$ 这一点映到 $0\in J$ 上, 而把接近 $(1,0)$ 但在它以下的 C 上所有的点映到 J 中接近 2π 的点上.

注 可以证明, 如果一对一的连续函数 f 的定义域是紧集, 那么 f^{-1} 必定是连续的. 上述反例说明了在这个陈述中, f 的定义域为紧集的条件是不能去掉的.

21. 不能作为任何连续函数列的极限的函数.

在区间 $[0,1]$ 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

兹证不存在 $[0,1]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$, 使对每一 $x\in[0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

事实上, 假如 f 是某个连续函数列 $\{f_n\}$ 的极限:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

令

$$F_n^{(k)}=\left\{x: f_n(x)\leqslant 1-\frac{1}{k}, 0\leqslant x\leqslant 1\right\},$$

$$S_m^{(k)}=\bigcap_{n=m}^{\infty} F_n^{(k)},$$

因 f_n 都是连续函数, 故对任何正整数 n 和 $k, F_n^{(k)}$ 都是闭集, 从而 $S_m^{(k)}$ 也是闭集. 再由关系式

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

得到

$$\{x: f(x)<1\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m^{(k)},$$

因此, $\{x: f(x)<1\}$ 是一个 F_σ 型集.

另一方面, $\{x: f(x)<1\}$ 是 $[0,1]$ 中的一切无理数所组成之集, 因而它不是 F_σ 型集 (参看 [25], p. 26). 由此导致矛盾. 故不存在连续函数列 $\{f_n\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

注 其实, 我们还可进一步构造 $[0,1]$ 上的一个函数 f, 它的连续点所组成之集在 $[0,1]$ 中稠密, 但 f 仍不是某个连续函数列的极限 (参看 [9]).

22. 仅在有理点间断的严格递增的函数.

设 $r_1, r_2, \cdots, r_k, \cdots$ 为数直线上的全部有理数. 命

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k},$$

这里, 按一切使 $r_k<x$ 的那些下标 k 求和. 因为所给的级数总是收敛的, 所以这个函数对一切实数 x 都有定义. 又因为对任意两个实数 $x_1, x_2, x_1<x_2$, 总存在有理数 r_{k_0}, 使得 $x_1<r_{k_0}<x_2$, 所以

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)+\frac{1}{2^{k_0}}>f(x_1).$$

因此, f 在 R^1 上是严格递增的.

兹证, f 在每个有理点间断而在每个无理点连续.

事实上, 设 r 是有理点, 对任一 $x>r$, 有

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k}=\sum_{r_k<r}\frac{1}{2^k}+\sum_{r\leqslant r_k<x}\frac{1}{2^k}.$$

假定有理点 r 的下标为 n, 那么

$$\sum_{r\leqslant r_k<x}\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^n}.$$

因此,

$$f(x)>\sum_{r_k<r}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^n}=f(r)+\frac{1}{2^n}.$$

在这个不等式中, 令 $x\to r+0$ (即 x 保持大于 r 而趋于 r) 而取极限, 就得到

$$f(r+0)\geqslant f(r)+\frac{1}{2^n}.$$

由此可见, 函数 f 在每个有理数点 r_n 都是右间断的, 而且它的右方跃度 $f(r_n+0)-f(r_n)\geqslant\frac{1}{2^n}$, 因而 f 在点 r_n 处间断.

再证, 函数 f 在其他点处都是连续的, 且在有理点 r_n 处的跃度等于 $\frac{1}{2^n}$. 这个结论可以从下面的考虑得出: 对于单调函数而言, 它的上界和下界之差大于或等于一切跃度之和. 而

$$\sup_k f(x)=\sum_k\frac{1}{2^k}=1,\quad \inf_k f(x)=0,$$

所以一切跃度之和 s 满足不等式

$$s\leqslant 1.$$

另一方面, 一切跃度之和大于或等于诸点 r_n 处的右方跃度之和, 所以

$$s\geqslant\sum_n\frac{1}{2^n}=1.$$

因而在诸点 r_n 处的右方跃度之和等于函数的全部可能跃度. 由此可知, 函数 f 在其他各点均连续, 且在点 r_n 处的跃度恰好等于 $\frac{1}{2^n}$.

注 由上述反例的构造法可知, 对于 R^1 中的任何可数子集, 必可做出在该集上无处连续而在其补集上处处连续的严格递增函数.

Haray[46] 构造了一个在正无理数集上连续而在其补集上无处连续的函数 h 如下:

$$h(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为无理数},\\ \left(\dfrac{1+p^2}{1+q^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 为互素的整数}.\end{cases}$$

设 $\alpha>0, 0\leqslant x\leqslant 1$, 令

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ 或 } x \text{ 为无理数},\\ q^{-\alpha}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数}.\end{cases}$$

Bhakta[27] 指出, 函数 f_α 在 $[0,1]$ 中的非零有理点处都间断, 而在 $[0,1]$ 中的其他点处都连续. 又, 当 $0<\alpha<1$ 时, f_α 在 $[0,1]$ 上无处可微; 当 $1<\alpha\leqslant 2$ 时, f_α 在 $x=0$ 处可微; 当 $\alpha>2$ 时, f_α 在 $[0,1]$ 上几乎处处可微.

Kristensen[56] 于 1968 年构造了一个定义在 R^1 上的函数, 它在每个有理点间断, 而在每个代数数的无理点处可微.

还可构造区间 $[0,1]$ 上的函数, 它的连续点所组成之集 A 与间断点所组成之集 B 在 $[0,1]$ 中都稠密, 且对任何非空开区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$, 交集 $A\cap(\alpha,\beta)$ 与 $B\cap(\alpha,\beta)$ 都具有连续统的势.

23. 零测度的不可数集.

将闭区间 $[0,1]$ 用分点 $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 分成三部分, 而取走中间的开区间 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. 将每一个留下来的闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$, 又各自等分成三部分 (对于第一个闭区间用 $\frac{1}{9},\frac{2}{9}$ 当作分点, 对于第二个闭区间用 $\frac{7}{9},\frac{8}{9}$ 当作分点), 而各自取走中间的开区间 $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 与 $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. 再将留下来的闭区间等分成三部分而取走其中间的一个开区间. 如此继续下去, 以至无限. 这样, 从 $[0,1]$ 中取走了一个开集 G, 它是可数个开区间的并集:

$$G=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left[\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\right]\cup\cdots.$$

开集 G 的测度为

$$mG=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\cdots=\frac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{2}{3}}=1,$$

故 $mC = m([0,1]\backslash G) = 1 - 1 = 0$.

因 C 是由闭区间 $[0,1]$ 中取走可数个彼此没有公共端点 (且与原来的区间 $[0,1]$ 也无公共端点) 的开区间而成, 故 C 是一个非空的完备集, 从而是一个不可数集 (参看 [4]).

显然, C 不能包含任何非空区间, 所以 C 为一疏集. 因此, C 是一个完备的疏集.

集 C 是由 Cantor[32] 构造的, 故通常称 C 为 Cantor **三分集**, 简称 Cantor **集**.

24. 任给实数 $a\,(0 < a < 1)$, 在 $[0,1]$ 中可构造一个测度为 a 的完备疏集.

令 $r = \frac{1-a}{3-2a}$, 则 $0 < r < \frac{1}{3}$. 我们先从闭区间 $[0,1]$ 中取走中间长度为 r 的开区间, 第二次从余下的两个闭区间中各自取走中间长度为 r^2 的开区间, 第三次又从余下的四个闭区间中各自取走中间长度为 r^3 的开区间, 如此继续下去. 这样, 全部取走的开区间的总长为

$$\alpha = r + 2r^2 + 4r^3 + \cdots = r[1 + 2r + (2r)^2 + \cdots] = \frac{r}{1-2r}.$$

于是, 余下之集的测度为

$$1 - \alpha = \frac{1-3r}{1-2r} = \alpha.$$

用这种方法得到的集通常称为**具正测度的** Cantor **集**, 它是一个完全疏集.

25. 在 Cantor 集上连续而在它的邻接区间上无处连续的函数.

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, C 的邻接区间按它们的长度减小顺序进行编号:

$$(a_1, b_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (a_2, b_2) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right),$$

$$(a_3, b_3) = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), (a_4, b_4) = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$$

$$(a_5, b_5) = \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \cdots.$$

又设 $\{c_n\}$ 是一个实数列且 $c_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots), \lim_{n\to\infty} c_n = 0$. 令

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ c_n, & x = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \\ \text{线性}, & x \in \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right] \text{ 或 } x \in \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]. \end{cases}$$

易见, f 在区间 (a_n, b_n) 内的图像是折线, 所以当 $x_0 \in (a_n, b_n)$ 时, f 在点 x_0 连续. 而当 $x_0 \in C$ 时 $f(x_0) = 0$, 由于 $c_n \to 0 (n \to \infty)$, 从而

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

因此, f 在点 x_0 也连续. 综上所述, f 在 $[0,1]$ 上处处连续. 再设

$$g(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的有理点},\\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的无理点},\end{cases}$$

并令

$$F(x)=f(x)g(x).$$

于是, 若 $x_0\in C$, 则 $f(x_0)=0$, 从而 $F(x_0)=0$. 由于 f 在 $[0,1]$ 上连续, g 在 $[0,1]$ 上有界, 因而

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=0.$$

所以 F 在点 x_0 连续. 因 $x_0\in C$ 是任取的, 故 F 在 C 上处处连续.

若 $x_0\in[0,1]\backslash C=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 且 x_0 为有理点, 则

$$F(x_0)=f(x_0)\neq 0.$$

因为在 x_0 的任意邻域内恒有无穷多个无理点, 而在这种点上 F 的值是零, 所以 F 在点 x_0 间断. 同理可证, 当 $x_0\in[0,1]\backslash C$ 且 x_0 为无理点时, F 在点 x_0 也间断. 总之, F 在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 上处处间断.

26. 在 Cantor 集上无处连续而在它的邻接区间上连续的函数.

设 C 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, $(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$ 是它的邻接区间. 在 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in C,\\ 1, & x=\dfrac{a_n+b_n}{2},\\ \text{线性}, & x\in\left[a_n,\dfrac{a_n+b_n}{2}\right] \text{ 或 } x\in\left[\dfrac{a_n+b_n}{2},b_n\right].\end{cases}$$

易见, f 在 C 上无处连续而在 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 上连续.

27. 在任意给定的 F_σ 型集上间断的函数.

对于一个给定的 F_σ 型集 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 其中 F_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是闭集, 可以认为这个集列是递增的, 即 $F_n\subset F_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 事实上, 如果它不是递增的, 那么, 我们就用 $F_1\cup F_2$ 代以 $F_2, F_1\cup F_2\cup F_3$ 代以 F_3, 等等. 于是, 新的闭集列是递增的, 这些集的并集也是 E. 设

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10^n}, & x \text{ 是 } F_n \text{ 中的有理点},\\ \dfrac{2}{10^n}, & x \text{ 是 } F_n \text{ 中的无理点},\\ 0, & x \text{ 不是 } F_n \text{ 中的点}.\end{cases}$$

显然, 函数 f_n 在集 F_n 上无处连续, 而在 $R^1\backslash F_n$ 上连续, 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

因为 $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{10^n}$, 故据 Weierstrass 判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 R^1 上是一致收敛的. 我们任取 $x_0 \in R^1\backslash E$, 由于每个函数 f_n 在点 x_0 都是连续的, 故由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的一致收敛性可知, 函数 f 在点 x_0 也是连续的.

兹证, 对于任意的点 $x_0 \in E, f$ 在 x_0 是间断的.

事实上, 可设 $x_0 \in F_n$ 而 $x_0 \notin F_{n-1}$, 于是, x_0 是函数 $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ 的连续点, 而是函数 $f_n, f_{n+1}, \cdots$ 的间断点, 并且函数 f_n 在点 x_0 处的振幅大于或等于 $\frac{1}{10^n}$, 函数 $f_{n+1}, f_{n+2}, \cdots$ 在点 x_0 处的振幅之和不大于 $\frac{2}{10^{n+1}}+\frac{2}{10^{n+2}}+\cdots=\frac{2}{9\cdot 10^n}$. 这样一来, 和函数 f 在点 x_0 处的振幅大于或等于 $\frac{1}{10^n}-\frac{2}{9\cdot 10^n}$, 因而 f 在点 x_0 是间断的.

28. 不能在全轴上做连续扩张的有界集上的有界连续函数.

函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上连续且有界, 但是, 不能将它保持连续性而扩张到全轴上, 甚至不能将它保持连续性而扩张到闭区间 $[0,1]$ 上, 这是因为当 $x\to 0$ 时, 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 没有极限.

注　可以证明, 若函数 f 在 R^1 的某个有界子集上一致连续, 则可把它保持连续性而扩张到 R^1 上. 上述反例说明了一致连续性的条件不能去掉.

29. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的无界函数.

(i) 若 A 是实数的一个无界集, 令

$$f(x)=x \quad (x\in A).$$

(ii) 若 A 是实数的一个有界集, 但不是闭的, 设 c 为 A 的一个聚点且 $c\notin A$, 则令

$$f(x)=\frac{1}{x-c} \quad (x\in A).$$

易见, f 是非紧集 A 上的连续的无界函数.

注　定义在紧集上的连续函数必定有界. 上述反例说明了非紧集上的连续函数未必有界, 甚至对于任意给定的非紧集, 都可以构造一定义在其上的连续的无界函数.

30. 一个不连续函数, 它把紧集映成紧集.

容易证明, 若 f 是定义在点集 E 上的连续函数, 则对任意紧集 $A\subset E, f(A)$ 必为紧集, 应当注意, 这个命题之逆并不成立. 例如, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

则对任意紧集 $A \subset (-\infty, +\infty)$, $f(A)$ 至多含有两个点, 因而 $f(A)$ 是紧集, 但 f 并不连续.

注 可以证明, 若对每一紧集 $A \subset E$, $f(A)$ 亦为紧集, 且当 $x_1 \neq x_2$ 时 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则 f 必为 E 上的连续函数.

31. $[0,1]$ 的一个闭子集 E 及 E 到 E 上的两个可换连续映射 f, g, 而不存在 f, g 的可换连续扩张.

De Marr[36] 曾提出下述问题: 设 X 是拓扑空间, 具有性质: 从 X 的闭子集 E 到 E 的每个连续映射可扩张到 X 上的连续映射. 此外, 设 f, g 是 E 到 E 上的两个**可换连续映射**, 即 f, g 连续且对任何 $x \in E$, 都有

$$f[g(x)] = g[f(x)].$$

在这些条件下, 是否必定存在 f, g 的连续扩张 F, G, 使 F 与 G 仍是可换映射?

Anderson 和 Kay[23] 指出, 即使 $X = [0,1]$, 这个问题的答案也是否定的. 他们的例子如下: 设

$$f(x) = g(x) = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3},$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{3}, \\ g(x) &= -\frac{x}{2} + \frac{2}{3}, \end{aligned}\right\} \quad \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1,$$

$E = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, 则 f 与 g 是 E 到 E 上的两个可换的连续映射. 假如 F, G 分别是 f, g 在 $X = [0,1]$ 上的连续扩张, 并令

$$x_0 = \inf\left\{x : F(x) = \frac{2}{3}\right\},$$
$$x_1 = \inf\left\{x : G(x) = \frac{2}{3}\right\},$$

那么, 由于 F 与 G 都连续, 因而 $F(x_0) = G(x_1) = \dfrac{2}{3}$, 而且当 $x_0 \leqslant x_1$ 时 $G(x_0) \geqslant \frac{2}{3}$, 等号仅当 $x_0 = x_1$ 时成立. 因此

$$G[F(x_0)] = G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

而 $F[G(x_0)] \leqslant \frac{1}{6}$, 于是

$$G[F(x_0)] \neq F[G(x_0)].$$

同理可证, 当 $x_1 < x_0$ 时, 有 $F[G(x_1)] = 0, G[F(x_1)] \geqslant \frac{1}{6}$. 因此, f 与 g 不可能有可换的连续扩张.

32. 存在 R^1 上的一个连续函数 f, 它有唯一不动点 x_0, 且当 $x \neq x_0$ 时, 数列

$$\left\{\frac{x+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x)}{n}\right\}$$

有界而不收敛于 x_0, 其中 $f_1(x)=f(x), f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$. 在 R^1 上定义函数 f 如下:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x \leqslant -1,\\ -2x, & |x| \leqslant 1,\\ -x-1, & x \geqslant 1.\end{cases}$$

则 f 在 R^1 上连续且有唯一不动点 $x_0=0$. 令

$$f_1(x)=f(x), f_n(x)=f[f_{n-1}(x)] \quad (n=2,3,\cdots).$$

又, 当 $x \geqslant 1$ 时,

$$\frac{1}{n}(x+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x))=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\left(x-\dfrac{1}{2}\right), & n\text{ 为奇数};\end{cases}$$

当 $x \leqslant -1$ 时,

$$\frac{1}{n}(x+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x))=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\left(x+\dfrac{1}{2}\right), & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

因此, 当 $|x| \geqslant 1$ 时, 数列 $\left\{\frac{x+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x)}{n}\right\}$ 是有界的. 又, 当 $|x|<1$ 且 $x \neq 0$ 时, 对充分大的 n, 有 $|f_n(x)| \geqslant 1$, 故由前面所述, 数列 $\left\{\frac{x+f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x)}{n}\right\}$ 也是有界的. 然而, 它并不收敛.

33. 一个在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界的函数, 它在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

设 $f(x)=\sin x^2$, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且有界. 但是, 它在 $[0,+\infty)$ 上并不一致连续. 事实上, 对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 无论怎样选取 $\delta>0$, 总可取正整数 n_0 充分大, 使 $\frac{1}{\sqrt{n_0}}<\delta$. 再取 $x_1=(2n_0\pi)^{\frac{1}{2}}, x_2=\left[\left(2n_0+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^{\frac{1}{2}}$, 则有

$$x_2^2-x_1^2=\frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}0<x_2-x_1&=\frac{\pi}{2}(x_2+x_1)^{-1} \leqslant \frac{\pi}{2}(2x_1)^{-1}\\ &=\frac{\pi}{4}x_1^{-1}<x_1^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2n_0\pi}}<\frac{1}{\sqrt{n_0}}<\delta.\end{aligned}$$

但是,

$$
\begin{aligned}
|f(x_2)-f(x_1)| &= \sin\left(2n_0+\frac{1}{2}\right)\pi-\sin 2n_0\pi \\
&= 1>\varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

因此, $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

注 可以证明, 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续 (参看本章问题 22). 上述反例说明了在这个陈述中, 不能把 "$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在" 代以 "f 在 $[0,+\infty)$ 上有界".

又, 定义在紧集上的连续函数必定是一致连续的. 上述反例还说明了在这个陈述中, 函数的定义域是紧集的条件不可去掉.

34. 存在两个一致连续函数, 其积并不一致连续.

函数 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\sin x$ 在 R^1 上都是一致连续的. 但是, 它们的乘积 $f(x)g(x)=x\sin x$ 在 R^1 上不一致连续.

注 容易证明, 假如函数 f 和 g 在它们共有的定义域 D 上都一致连续, 并且又都是有界的, 那么它们的乘积 fg 在 D 上也一致连续. 也容易证明, 在有界集上一致连续的任何函数在该集上都是有界的 (参看本章问题 21). 由此可见, 上述反例之所以可能, 只是由于所考虑的函数, 它们共有的定义域是无界的, 而且至少有一个函数是无界的.

关于无界区间上的两个一致连续函数的乘积是否仍是一致连续的问题, Elyash[39] 等人得到了下列有趣的结果.

用 K 表 $[1,+\infty)$ 上非负一致连续函数类.

引理 1 若 $f\in K$, 则 $\limsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}<+\infty$.

证 设 $\limsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, 则存在数列 $\{x_k\}$, 使 $x_k\to+\infty(k\to\infty), x_{k+1}-x_k>1$, 且若 $c_k=\frac{f(x_k)}{x_k}$, 则 $c_{k+1}\geqslant c_k, c_k\to+\infty$. 对每一 k, 有

$$
\begin{aligned}
|f(x_{k+1})-f(x_k)| &= c_{k+1}x_{k+1}-c_kx_k \\
&\geqslant c_k(x_{k+1}-x_k).
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon=1, \delta$ 是满足 $0<\delta<1$ 的任意数, 则存在 k_0 使 $k>k_0$ 时, $c_k>\frac{2}{\delta}$. 取 $k>k_0$, 并选取 $t_1,t_2,\cdots,t_m$, 使

$$
x_k=t_1<t_2<\cdots<t_m=x_{k+1},
$$

这里 $\frac{\delta}{2}<t_{i+1}-t_i<\delta(i=1,2,\cdots,m-1)$. 对某个 i, 必有

$$
|f(t_{i+1})-f(t_i)|\geqslant c_k(t_{i+1}-t_i),
$$

因为否则将有

$$\begin{aligned}|f(x_{k+1})-f(x_k)| &\leqslant \sum_{i=1}^{m-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|\\ &< c_k(x_{k+1}-x_k),\end{aligned}$$

与假设矛盾. 因此,

$$|f(t_{i+1})-f(t_i)| \geqslant c_k(t_{i+1}-t_i) > \frac{2}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2}=1,$$

于是 f 在 $[1,+\infty)$ 上不一致连续, 矛盾.

引理 2 若 $xf(x)\in K$, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-y|<\delta$ 时, 就有

$$x|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

证 因 $xf(x)\in K$, 据引理 1, 存在常数 $M>0$, 使 $f(x)<M$. 此外, 存在 $\delta>0$, 使 $\delta<\frac{\varepsilon}{2M}$, 且当 $|x-y|<\delta$ 时, 有

$$|xf(x)-yf(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$x|f(x)-f(y)|\leqslant|xf(x)-yf(y)|+f(y)|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon. \qquad \square$$

用 K^* 表 $[1,+\infty)$ 上的一切连续函数 f, 使 $f\in K$, 且当 $g\in K$ 时 $fg\in K$.

定理 $f(x)\in K^*$ 的充要条件是 $xf(x)\in K$.

证 必要性: 因 $x\in K$, 故必要性成立.

充分性: 设 $xf(x)\in K$. 令 $\varepsilon>0, g(x)\in K$. 据引理 1, 存在常数 M_1 及 M_2, 使

$$f(x)<M_1,\quad \frac{g(x)}{x}<M_2.$$

据在 $g(x)$ 上的假设及引理 2, 可选取 $\delta>0$, 当 $|x-y|<\delta$ 时

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_1},\quad y|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_2}.$$

因此, 当 $|x-y|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leqslant f(x)|g(x)-g(y)|+\left(\frac{g(y)}{y}\right)y|f(x)-f(y)|\\ &< M_1\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1}+M_2\cdot\frac{\varepsilon}{2M_2}\\ &=\varepsilon,\end{aligned}$$

故 $f(x) \in K^*$.

35. 一个一致连续的函数, 其反函数并不一致连续.

函数 $\ln x$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上是一致连续的, 但其反函数 e^x 在 $[\ln a,+\infty)$ 上并不一致连续.

36. 两个间断函数, 其最小值函数却是一致连续的.

在 R^1 上如下定义函数:

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = 1 - x + [x],$$

其中 $[x]$ 代表括号函数. 显然, 函数 f 和 g 在 x 为整数的点都不连续. 令

$$h(x) = \min\{x - [x], 1 - x + [x]\}.$$

现证 h 在 R^1 上一致连续.

事实上, 不妨设 $h(x) \geqslant h(y)$. 按 $h(y)$ 的定义, 存在正整数 n, 使 $|y-n| = h(y)$. 于是

$$h(x) \leqslant |x-n| \leqslant |x-y| + |y-n|,$$

从而

$$0 \leqslant h(x) - h(y) \leqslant |x-y|.$$

由此可知, h 在 R^1 上是一致连续的.

37. 在开区间 I_1 与 I_2 内均一致连续, 但在 $I_1 \cup I_2$ 内不一致连续的函数.

设

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x},$$

可证 f 在开区间 $I_1 = (-1,0)$ 及 $I_2 = (0,1)$ 上都是一致连续的.

事实上, 令

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ f(x), & 0 < x < 1, \\ \sin 1, & x = 1. \end{cases}$$

因为 $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1, \lim_{x\to 1-0} f(x) = \sin 1$, 所以函数 $F(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 从而它在 $[0,1]$ 上一致连续, 故 f 在开区间 $(0,1)$ 上也一致连续.

同理可证, f 在开区间 $I_1 = (-1,0)$ 上也是一致连续的.

下面将证明, f 在 $I_1 \cup I_2 = \{x : 0 < |x| < 1\}$ 上不一致连续. 为此, 取 $x' > 0, x'' = -x' < 0$, 则

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{|\sin x'|}{x'} - \frac{|\sin x''|}{x''} \right| = 2\frac{\sin x'}{x'}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

故对任给的 $\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon<1)$, 无论正数 δ 取得怎样小, 必可取得正数 h 如此小, 使 $|x'-x''|=h<\delta$, 而

$$|f(x')-f(x'')|=2\frac{\sin x'}{x'}\geqslant\varepsilon,$$

因此, f 在 $I_1\cup I_2$ 上不是一致连续的.

38. 两个单调函数 f,g, 其中 f 连续而 g 间断, 但复合函数 $f\circ g$ 却是连续的单调函数.

在区间 $[0,2]$ 上如下定义函数:

$$g(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ x+1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

显然, 函数 g 在 $[0,2]$ 上是递增的, 它有间断点 $x=1$, 且 $g(0)=0,g(2)=3$. 现在, 我们在区间 $[0,3]$ 上定义函数 f :

$$f(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & 1<y<2,\\ y-1, & 2\leqslant y\leqslant 3.\end{cases}$$

显然, f 在区间 $[0,3]$ 上递增, 且 $f[g(x)]=x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$. 因此, $f\circ g$ 是区间 $[0,2]$ 上的单调连续函数.

注　容易证明, 若 $f(y)$ 是严格单调的连续函数, 而递增函数 $y=g(x)$ 在点 x_0 间断, 则复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 亦必间断. 上述反例说明了在这个陈述中, 函数 f 的严格单调性不能减弱为单调性.

39. 两个区间之间的一个无处单调的一一对应.

设 f 定义在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\ \text{是有理数},\\ 1-x, & x\ \text{是无理数}.\end{cases}$$

显然, f 在 $[0,1]$ 的任何子区间上都不可能是单调的. f 的值域也是 $[0,1]$, 而且 f 还是区间 $[0,1]$ 到自身的一个一一对应.

类似地, 可以做出具有同样性质的将区间 $[a,b]$ 映到区间 $[c,d]$ 上的函数:

$$g(x)=\begin{cases}c+(d-c)\dfrac{x-a}{b-a}, & \dfrac{x-a}{b-a}\ \text{是有理数},\\[2ex] d+(c-d)\dfrac{x-a}{b-a}, & \dfrac{x-a}{b-a}\ \text{是无理数}.\end{cases}$$

40. 两个严格递增的函数, 其积不是单调函数.

函数 $f(x) = x$ 和 $g(x) = x - 1$ 在区间 $[0,1]$ 上都是严格递增的, 但其乘积 $f(x)g(x) = x(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上既不递增也不递减.

41. 无处单调的连续函数.

在 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, 设 $f_1(x) = |x|$, 而在其他的 x 值处, 用 1 为周期来延拓 $f_1(x)$, 即: 对每个实数 x 和整数 n, 都有

$$f_1(x+n) = f_1(x).$$

当 $n > 1$ 时, 定义 $f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$, 于是对于每个整数 n, f_n 是有周期 4^{-n+1} 的周期函数, 其极大值为 $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$. 最后, 以 R^1 为定义域规定 f :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

因为 $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$, 故据 Weierstrass 判别法, 这级数在 R^1 上一致收敛, 因而 f 在 R^1 上连续.

在任何形如 $a = k \cdot 4^{-m}$ 的点, 式中 k 是整数, m 是正整数, 当 $n > m$ 时就有 $f_n(a) = 0$, 从而

$$f(a) = f_1(a) + \cdots + f_m(a).$$

对于任何正整数 m, 设 h_m 是正数 4^{-2m+1}. 于是, 当 $n > 2m+1$ 时 $f_n(a + h_m) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} f(a+h_m) - f(a) &= [f_1(a+h_m) - f_1(a)] + \cdots + [f_m(a+h_m) - f_m(a)] \\ &\quad + f_{m+1}(a+h_m) + \cdots + f_{2m+1}(a+h_m) \\ &\geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0. \end{aligned}$$

同样地,

$$f(a - h_m) - f(a) \geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

由于形如 $a = k \cdot 4^{-m}$ 的点在 R^1 中是稠密的, 所以 f 不可能在一个开区间内单调.

注 其实, 还可进一步构造无处单调的可微函数 (参看第三章反例 31).

42. 以一个任意的非紧集为定义域的连续的有界函数, 它没有局部极值

(i) 若 E 是一个无界的实数集, 令

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in E.$$

则 f 在 E 上没有局部极大值. 如果定义

$$f(x) = (-1)^{[|x|]} \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in E,$$

此处 $[|x|]$ 是小于或等于 $|x|$ 的整数中最大者, 则 f 在 E 上既没有局部极大值也没有局部极小值.

(ii) 如果 E 是一个有界的非闭的实数集, 设 c 是 E 的一个聚点, 但 $c \notin E$. 令

$$f(x) = -|x-c|, \quad x \in E.$$

这时 f 在 E 上没有局部极大值. 如果定义

$$f(x) = (-1)^{\left[\frac{1}{|x-c|}\right]}\{L - |x-c|\},$$

其中方括号再一次用来表示 “括号函数”, 而 L 是某个包含 E 的区间的长度, 这样的函数 f 在 E 上既没有局部极大值也没有局部极小值.

注　定义在紧集上的连续函数必有局部极值. 上述反例说明了非紧集上的连续函数未必有局部极值, 甚至对于任意给定的非紧集, 都可以在其上构造一个连续的有界函数, 它没有局部极值.

43. 定义域为紧集的没有局部极值的有界函数.

取闭区间 $[0,1]$ 作为定义域, 这是个紧集, 对于 $x \in [0,1]$, 定义

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{n}{n+1}, & x = \dfrac{m}{n}, m \text{ 与 } n \text{ 是互素的整数, 且 } n > 0, \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

则在 $[0,1]$ 的每个点的任一邻域内, f 的值能够任意逼近数 1 与 -1, 却总是介于二者之间.

44. 有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数.

设

$$f(x) = -x, \quad -1 \leqslant x < 1.$$

对任意 $x \in R^1$, 令 $f(x+2) = 2f(x)$, 则 f 是 R^1 上的实值函数, 它有无穷多个局部极大值而无局部极小值.

注　Posey 和 Vaughan[65] 构造了一个函数, 它在每个区间中有一个真正局部极大值.

45. 处处取得局部极小值的非常值函数.

设 C 是 $[0,1]$ 中的 Cantor 集, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1]\backslash C, \\ 0, & x \in C. \end{cases}$$

则函数 f 具有所需的性质.

注 若 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且在 $[a,b]$ 上处处取得局部极值, 则 f 必为常值函数 (参看本章问题 43). 上述反例说明了在这个命题中, 函数为连续的条件不可去掉.

46. 具有介值性质的间断函数.

在闭区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{1}{2^n},n\ \text{为奇数},\\ 0, & x=0\ \text{或}\ x=\dfrac{1}{2^n},n\ \text{为偶数},\\ \text{线性}, & \dfrac{1}{2^{n+1}}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2^n},n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

易见, f 在 $x=0$ 不连续, 但 f 却具有介值性质. 即, 如果 M 是介于数 $f(0)=0$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ 之间的任意数, 那么在开区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内至少可以找到一点 ζ, 使得 $f(\zeta)=M$.

注 可以证明, 闭区间上的连续函数具有介值性质. 上述反例说明了介值性质绝不是连续函数的特征, 对于不连续函数, 也有可能发生的. Lebesgue 甚至构造了一个定义在半开区间 $[0,1)$ 上而取值于 $[0,1]$ 中的无处连续函数, 它在每个任意小的子区间上都取尽 $[0,1]$ 中的一切值 (参看 [9]).

47. 两个具有介值性质的函数, 其和却没有介值性质.

令

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

此时

$$F'(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$G'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

再令 $f(x)=(F'(x))^2, g(x)=(G'(x))^2$, 则 f 与 g 都具有介值性质, 因为 F' 与 G' 都具有这个性质. 但是, 由于

$$(f+g)(x)=\begin{cases}4x^2+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

所以 $f+g$ 在包含点 0 的任何区间内都不具有介值性质.

48. 一个在集 A 与 B 上均连续的函数, 它在 $A\cup B$ 上并不连续.

若 f 在集 E 上连续, 且 $A\subset E$, 则 f 在 A 上显然也连续. 但是, 若 f 在 A,B 上连续, 则 f 在 $E=A\cup B$ 上未必连续. 例如, 设 A 为 R^1 中的全体有理数, $B=R^1\backslash A$. 令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in B.\end{cases}$$

则 f 在 A 和 B 上均连续. 但 f 在 R^1 上无处连续.

49. 存在若干个半连续函数, 其和是一个无处半连续的函数.

在以下各函数的定义中都假定 p 与 q 是互素的整数且 $q>0$. 我们在 R^1 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为奇数},\\ -2-\dfrac{4}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为偶数},\\ -2, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为奇数},\\ 1+\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为偶数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为奇数},\\ 3+\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为偶数},\\ 3, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

那么, f,g 和 h 各自都是处处半连续的, 而它们的和

$$f(x)+g(x)+h(x)=\begin{cases}-2+\dfrac{2}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为奇数},\\ 2-\dfrac{2}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, q\text{ 为偶数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

是一个无处半连续的函数.

50. 两个半连续函数, 其最小值函数并不半连续.

在区间 $[0,+\infty)$ 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则

$$\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x>0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

易见, 函数 f 在 $x=0$ 上半连续, g 在 $x=0$ 下半连续, 但

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\min\{f(x),g(x)\}=1>0>\underline{\lim_{x\to 0}}\min\{f(x),g(x)\}=-1,$$

这表示函数 $\min\{f,g\}$ 在 $x=0$ 既不上半连续也不下半连续.

51. 无处半连续的函数.

在闭区间 $[0,1]$ 上如下定义函数:

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}, & x=\dfrac{m}{n}, m \text{ 和 } n \text{ 是互素的整数, 且 } n>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

则对任意 $x_0\in[0,1]$, 函数 f 在 x_0 都不是上半连续的, 这是因为

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=1,$$

从而不可能有 $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)\leqslant f(x_0)$.

同理可证, f 在 x_0 也不是下半连续的.

52. 处处不连续而又处处半连续的函数.

函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

是处处不连续的, 但在有理点上, 它是上半连续的, 而在无理点上, 它是下半连续的.

53. 一个收敛的上半连续函数列, 其极限函数并不上半连续.

将有理数排成 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$, 并在 R^1 上定义函数

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,r_2,\cdots,r_n\},\\ 0, & x\notin\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}.\end{cases}$$

易知, 对每一 n, f_n 是 R^1 上的上半连续函数. 然而, 极限函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 R^1 上并不上半连续.

第三章　微　　分

基本概念和主要结果

在这一章的某些反例中, **导数**这个概念允许用到无穷极限的情形:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +\infty,$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\infty.$$

然而, **可微函数**这个概念仍限于在严格的意义上使用, 即函数在其定义域内各点处具有有限的导数.

类似地, 可以定义单侧导数 —— **右导数**和**左导数**如下:

$$f'(x+0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f'(x-0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

显然, 要使导数 $f'(x)$ 存在, 当且仅当 f 在 x 处的右导数和左导数存在而且相等, 因而它们都等于 $f'(x)$.

从导数的定义易知, 若 f 在点 x 处可微, 则 f 在 x 处连续. 但这个命题的逆命题不正确. 在本章的反例 29 中将给出在整个 R^1 上连续而在任何点都不可微的函数. 我们称这种函数为**无处可微函数**.

为了本章及后面各章的需要, 我们把有关导数的熟知结果陈述如下:

1. 设 f 和 g 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 在 $x\in[a,b]$ 处可微, 则 $f+g, fg, f/g$ (于 x 的某邻域中 $g\neq 0$) 都在 x 处可微, 且

(i) $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$;

(ii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

2. **Fermat 定理** 设 f 定义在 $[a,b]$ 上, 若 f 在 $x \in (a,b)$ 处有局部极值且 $f'(x)$ 存在, 则 $f'(x)=0$.

3. **Rolle 定理** 设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 如果: (i) f 在 $[a,b]$ 上连续, (ii) f 在开区间 (a,b) 内可微, (iii) $f(a)=f(b)$, 那么存在点 $\zeta \in (a,b)$, 使 $f'(\zeta)=0$.

4. **Lagrange 中值定理**, 亦称**微分中值定理** 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可微, 则存在点 $\zeta \in (a,b)$, 使

$$f'(\zeta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

5. **Cauchy 定理** 设 f,g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可微, 且 $g'(x)\neq 0$, 则存在点 $\zeta \in (a,b)$, 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

6. 设 f 在 (a,b) 上可微, 若对所有的 $x \in (a,b)$,

(i) $f'(x)\geqslant 0$, 则 f 在 (a,b) 上递增;

(ii) $f'(x)\equiv 0$, 则 f 为常值函数;

(iii) $f'(x)\leqslant 0$, 则 f 在 (a,b) 上递减.

7. **L'Hospital 法则** 设函数 f,g 在点 c 的某邻域内可微, $f(c)=g(c)=0$, 则

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

如果右边的极限存在 (有限实数).

8. "链式法则" 若函数 g 在点 c 可微而 f 在点 $g(c)$ 可微, 则复合函数 $\varphi=f\circ g$ 在点 c 可微, 并且

$$\varphi'(c)=f'[g(c)]\cdot g'(c).$$

9. 设 f 在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\eta,x_0+\eta)$ 上可微. 如果

(i) 当 $x\in(x_0,x_0+\eta)$ 时, $f'(x)<0$, 而当 $x\in(x_0-\eta,x_0)$ 时, $f'(x)>0$, 则 f 在 x_0 点取得局部极大值 $f(x_0)$.

(ii) 当 $x\in(x_0,x_0+\eta)$ 时, $f'(x)>0$, 而当 $x\in(x_0-\eta,x_0)$ 时, $f'(x)<0$, 则 f 在 x_0 点取得局部极小值 $f(x_0)$.

若在某区间上 f 有导数 f', 而 f' 也可微, 则记 f' 的导数为 f'', 并称 f'' 为 f 的**二阶导数**. 如此继续, 得函数

$$f,f',f'',f^{(3)},\cdots,f^{(n)},\cdots,$$

其中每个函数都是它前面一个函数的导函数.

函数 f 称为**无穷可微**的, 如果在其定义域的各点处, f 有各阶有限的导数.

10. 设 $f'(x_0)=0, f''(x_0)$ 存在且有限.

(i) 若 $f''(x_0)>0$, 则 f 在点 x_0 取得局部极小值 $f(x_0)$.

(ii) 若 $f''(x_0)<0$, 则 f 在点 x_0 取得局部极大值 $f(x_0)$.

11. **Taylor 定理**　设 f 是 $[a,b]$ 上的实值函数, n 是正整数, $f^{(n-1)}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对任意 $t\in[a,b], f^{(n)}(t)$ 存在且有限. 再设 α,β 是 $[a,b]$ 的不同点, 令

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k,$$

则存在点 $x\in(\alpha,\beta)$, 使

$$f(\beta)=p(\beta)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

12. **Leibniz 定理**　设 n 是正整数, 函数 f 与 g 在点 c 处有 n 阶有限导数, 则函数 $F=fg$ 在点 c 处也有 n 阶有限导数, 且

$$F^{(n)}(c)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(j)}(c)g^{(n-j)}(c).$$

在这一章的某些问题和反例中, 还要涉及无穷级数的收敛, 绝对收敛和一致收敛, 以及一致收敛的 Weierstrass 判别法等基本概念和定理.

问　题

1. 证明: 如果 f 是 (a,b) 上的凸函数, 且在 (a,b) 上可微, 那么对任意 $x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$, 都有 $f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$.

证　设 $x_1,x_2\in(a,b), x_1<x_2$. 对任意 $x\in(x_1,x_2)$, 有

$$x=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2.$$

因 f 是凸函数, 故

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

即

$$(x_2-x_1)f(x)\leqslant(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2),$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

在上式中令 $x \to x_1+0$, 则有

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

若令 $x \to x_2-0$, 则有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2).$$

因此, $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$.

2. 证明: 函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域内有不可微的点, 但在 $x=0$ 这点是可微的.

证 因 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|=0$, 故 $f'(0)=0$, 即 f 在 $x=0$ 处是可微的.

兹证, 对于 $x=0$ 的任何邻域 $(-\delta,\delta)$ $(\delta>0)$ 内, f 总有不可微的点. 事实上, 令

$$x_n=\frac{1}{n+\dfrac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时, $x_n\in(-\delta,\delta)$. 对于这样的点 x_n, 有

$$f'_-(x_{2n})=\pi, \quad f'_+(x_{2n})=-\pi.$$

故

$$f'_-(x_{2n})\neq f'_+(x_{2n}).$$

同理可得

$$f'_-(x_{2n+1})\neq f'_+(x_{2n+1}).$$

因此, f 在点 x_n 处不可微.

3. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导数, $f(0)=0$. 证明: 由

$$g(0)=f'(0), \quad g(x)=\frac{f(x)}{x} \quad (x\neq 0)$$

定义的函数 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数.

证 对 $x\neq 0$,

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}=f'(\theta x),$$

这里 $0<\theta<1$. 因 f' 连续, 故得到

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f'(\theta x)=f'(0)=g(0).$$

这样, g 在 $x=0$ 连续, 从而在所有的点都连续. 由 L'Hospital 法则, 得到

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x} = \frac{f''(0)}{2}, \end{aligned}$$

因此, g 在 $x=0$ 可微, 从而处处可微. 对 $x\neq 0$, 有

$$g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}.$$

再由 L'Hospital 法则, 得

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}.$$

因此, g' 在 $x=0$ 连续. g' 在其他点的连续性是明显的.

4. 设 f 是定义在区间 I 上的实值函数. 证明: f 在 $x_0\in I$ 可微的充要条件是, 存在 I 上的函数 F, 它在 x_0 连续, 且对任意 $x\in I$, 有

$$f(x)-f(x_0) = F(x)(x-x_0). \tag{1}$$

证 必要性: 若 f 在 x_0 可微, 则

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &= f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0) \\ &= [f'(x_0)+\varepsilon(x)](x-x_0), \end{aligned}$$

其中 $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$. 令

$$F(x) = \begin{cases} f'(x_0)+\varepsilon(x), & x\neq x_0, \\ f'(x_0), & x=x_0. \end{cases}$$

显然, F 在 x_0 连续, 且符合要求 (1).

充分性: 设存在 I 上的函数 F, 它在 x_0 连续且满足 (1), 即有

$$\begin{aligned} f(x)-f(x_0) &= F(x)(x-x_0) \\ &= F(x_0)(x-x_0)+[F(x)-F(x_0)](x-x_0). \end{aligned}$$

令

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} F(x)-F(x_0), & x\neq x_0, \\ 0, & x=x_0, \end{cases}$$

则 $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$, 且

$$f(x)-f(x_0) = F(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0),$$

故 f 在 x_0 可微.

注　问题 4 显然是可微定义的另一种表示形式: 而且可知 $F(x_0)=f'(x_0)$.

5. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

证　因 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>a$, 使当 $x>M$ 时, 有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又

$$\frac{f(x)-f(M)}{x-M}=f'(\zeta)\quad(M<\zeta<x),$$

故当 $x>M$ 时, 有

$$\frac{|f(x)-f(M)|}{x-M}=f'(\zeta)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$|f(x)-f(M)|<\frac{\varepsilon(x-M)}{2},$$
$$|f(x)|<|f(M)|+\frac{\varepsilon(x-M)}{2},$$

从而

$$\frac{|f(x)|}{x}<\frac{|f(M)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{x-M}{x}\quad(x>M).$$

固定 M, 则有 $x_0>M$, 当 $x>x_0$ 时,

$$\frac{|f(M)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 当 $x>x_0$ 时,

$$\frac{|f(x)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

6. (i) 设 f 于有界区间 (a,b) 内可微.

(a) 由 $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$ 可否推出 $\lim_{x\to a+0} f'(x)=\infty$?

(b) 由 $\lim_{x\to a+0} f'(x)=\infty$ 可否推出 $\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$?

(ii) 设 f 于 $(a,+\infty)$ 内可微.

(a) 由 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在可否有 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在?

(b) 由 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在, 可否有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在?

解 (i) (a) 一般说来, 不能保证 $\lim_{x\to a+0} f'(x) = \infty$. 例如, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上定义函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}.$$

显然有 $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$. 但是,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

对于 $x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 有 $f'(x_n) = 0$, 因而 $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$ 不成立.

(b) 未必成立. 例如, 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $(0, 1)$ 上可微, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, 故

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty.$$

然而 $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt[3]{x} = 0$.

(ii) (a) 不能. 例如, 函数 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微, 且

$$f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2},$$

故 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在. 然而 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) 不能. 例如, 函数 $f(x) = \cos(\ln x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界且可微, 其导数为

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

然而 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

7. 设 f 在有界区间 (a, b) 内可微. 证明: 若 f 在 (a, b) 上无界, 则 f' 在 (a, b) 上亦必无界, 其逆不真.

证 (反证法) 设存在常数 M, 使 $|f'(x)| \leqslant M$ $(a < x < b)$. 取定 $c \in (a, b)$, 则对任意 $x \in (a, b)$, 有

$$|f(x) - f(c)| = |f'(\zeta)||x - c| \leqslant M(b - a),$$

其中 ζ 在 c 与 x 之间, 从而 $\zeta \in (a, b)$. 因

$$|f(x) - f(c)| \geqslant |f(x)| - |f(c)|,$$

故

$$|f(x)| \leqslant |f(c)| + M(b - a),$$

这与 f 在 (a, b) 上无界的条件发生矛盾. 因此, f' 在 (a, b) 上必定是无界的.

逆命题不真. 例如, 设 $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 < x < 1)$, 则 f 在 $(0, 1)$ 内可微且有界, 但其导函数却是无界的.

注 无界区间上的无界函数的导函数未必无界. 例如, 函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上无界, 但 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 却是有界的.

8. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=L>0.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

证 因 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=L>0$, 故存在正数 A, 当 $x>A$ 时, $f'(x)\geqslant\frac{L}{2}$. 由微分中值定理, 当 $x_2>x_1>A$ 时有等式

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(\zeta)(x_2-x_1),\quad x_1<\zeta<x_2,$$

故

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)+\frac{L}{2}(x_2-x_1).$$

固定 x_1, 当 $x_2\to+\infty$ 时 $\frac{L}{2}(x_2-x_1)\to+\infty$, 故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

9. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 均存在. 证明 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

证 令 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=A$, 则存在 $x_0>a$, 当 $x>x_0$ 时有

$$|f'(x)|\geqslant\frac{|A|}{2}.$$

在 $[x_0,x]$ 上应用微分中值定理,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(\zeta)|\geqslant\frac{|A|}{2},\quad x_0<\zeta<x.$$

因 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0,$$

从而 $A=0$.

10. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 并在使 $f(x)=0$ 的点 x 处可微, 且 $f'(x)\neq 0$. 证明: 若 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 f 的不同的零点, 即 $f(x_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty.$$

证　令

$$M=\{x\in[a,+\infty):f(x)=0\}.$$

我们要证明, 对任意 $\{x_n\}\subset M$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty.$$

假如不然, 即存在数列 $\{x_n\}\subset M$ 及实数 $b>a$, 使 $\{x_n\}$ 中有子列 $\{x_{n_k}\}\subset[a,b]$. 于是, $\{x_{n_k}\}$ 中有收敛子列, 不妨设

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,+\infty).$$

据 f 的连续性, 有

$$0=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0),$$

即 $x_0\in M$. 但依题设, $f'(x_0)$ 存在且 $|f'(x_0)|>0$, 故据导数的定义, 存在 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\left|\frac{f(x)}{x-x_0}\right|>0,$$

即当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)|>0$. 这与 $f(x_{n_k})=0\ (k=1,2,\cdots)$ 且 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$ 矛盾.

11. 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}=0.$$

证明: (i) f 的右导数处处存在. (ii) f 必为常值函数.

证　(i) 因为 $\lim_{h\to0+}\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}=0$, 所以对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<h<\delta$ 时

$$\left|\frac{f(x+h)-f\left(x+\frac{1}{2}h\right)}{\frac{h}{2}}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{f\left(x+\frac{1}{2}h\right)-f\left(x+\frac{1}{4}h\right)}{\frac{h}{4}}\right|<\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$\left|\frac{f\left(x+\frac{h}{2^k}\right)-f\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}h\right)}{\frac{h}{2^{k+1}}}\right|<\varepsilon,$$

$$\cdots\cdots.$$

又因为 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 所以有

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[f\left(x+\frac{1}{2^k}h\right)-f\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}h\right)\right],$$

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{1}{2^k}h\right)-f\left(x+\frac{1}{2^{k+1}}h\right)\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}h\varepsilon=h\varepsilon,\end{aligned}$$

从而

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<\varepsilon,$$

即

$$f'(x+0)=0.$$

(ii) 因 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$, 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<h<\delta$ 时有

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon h.$$

对于任意 $a,b\in(-\infty,+\infty)$, 我们证明 $f(a)=f(b)$. 为此, 取一个充分大的正整数 n_0, 使得 $\frac{b-a}{n_0}<\delta$ (不妨设 $a<b$), 则

$$\begin{aligned}|f(a)-f(b)|\leqslant&\left|f(a)-f\left(a+\frac{b-a}{n_0}\right)\right|+\left|f\left(a+\frac{b-a}{n_0}\right)-f\left(a+2\frac{b-a}{n_0}\right)\right|\\&+\cdots+\left|f\left(a+(n_0-1)\frac{b-a}{n_0}\right)-f(b)\right|\\\leqslant&\frac{b-a}{n_0}\varepsilon+\frac{b-a}{n_0}\varepsilon+\cdots+\frac{b-a}{n_0}\varepsilon=(b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $f(a)=f(b)$. 又由 a,b 的任意性可知 f 必为常值函数.

12. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$. 证明存在 $c\in(a,b)$, 使 $f(c)=0$.

证 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$, 于是

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0,$$

故存在 $\delta_1>0$, 使当 $x_1\in(a,a+\delta_1)$ 时

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0.$$

由 $x_1-a>0$ 得 $f(x_1)>f(a)=0$. 又因为

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$$

故存在 $\delta_2>0$, 使当 $x_2\in(b-\delta_2,b)$ 时

$$\frac{f(x_2)-f(b)}{x_2-b}>0,$$

从而有 $f(x_2)<f(b)=0$.

取 δ_1,δ_2 足够小, 使 $a+\delta_1<b-\delta_2$. 因 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, 故由连续函数介值定理, 存在 $c, a<x_1<c<x_2<b$, 使 $f(c)=0$.

13. 已知 f 在 $[0,1]$ 上可微, $f(0)=0, f(1)=1, k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为 n 个正数. 证明: 在 $[0,1]$ 内存在一组互不相等的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

证　令 $\frac{k_i}{\sum_{i=1}^{n}k_i}=\eta_i$, 则 $0<\eta_i<1\ (i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum_{i=1}^{n}\eta_i=1$.

因 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 故 f 必可取到 $f(0)$ 与 $f(1)$ 之间的一切值. 现以点 $y=\eta_1,\eta_1+\eta_2,\cdots,\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{n-1}$ 来分割区间 $[f(0),f(1)]$, 则在 x 轴上必有 u_i 使

$$f(u_i)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_i\quad(i=1,2,\cdots,n-1).$$

若 u_i 不止一个, 可取最大者作为 u_i. 这样, u_i 必将 $[0,1]$ 分割成 n 个子区间 $[u_{i-1},u_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$, 且 $f(u_i)-f(u_{i-1})=\eta_i$. 据微分中值定理,

$$f(u_i)-f(u_{i-1})=f'(x_i)(u_i-u_{i-1}).$$

注意到 $f'(x_i)\neq 0$ (否则将有 $\eta_i=0$, 这与 $0<\eta_i<1$ 矛盾), 故 $\frac{\eta_i}{f'(x_i)}=u_i-u_{i-1}$. 因此

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_{i-1})=1\quad(\text{注意 } u_0=0,u_n=1),$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\dfrac{k_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i}}{f'(x_i)}=1,$$

从而得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

由于 $[u_{i-1},u_i](i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同, 故 x_i 也互不相同.

14. 给定实数 a_0, 令

$$a_1=\sin a_0, a_2=\sin a_1, \cdots, a_{n+1}=\sin a_n, \cdots.$$

证明数列 $\{na_n^2\}$ 收敛, 并求出其极限 ([22], 1975, p. 83).

证 可以证明, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ (参看第二章问题 3).

对任一 $a_0\neq k\pi$ (k 为整数), 有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-\sin^2 a_n}{a_n^2\sin^2 a_n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{3},$$

从而

$$\frac{1}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k^2}-\frac{1}{a_{k-1}^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_0^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n^2}.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} na_n^2=3\quad (a_0\neq k\pi).$$

若 $a_0=k\pi$, 则 $\lim_{n\to\infty} na_n^2=0$.

15. 设函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续, g 可微, $g(a)=0, \lambda\neq 0$ 为常数. 证明: 若

$$|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant |g(x)|,$$

则 $g\equiv 0$ ([22], 1968, p. 417–418).

证 (反证法) 若 $g\not\equiv 0$, 则存在子区间 $(c,d)\subset(a,b)$, 使 g 在 (c,d) 上不为零, 而且 $g(c)=0$. 于是, 在 (c,d) 上有

$$\left|f(x)+\frac{\lambda g'(x)}{g(x)}\right|\leqslant 1.$$

令 $h(x)=\ln|g(x)|$, 则

$$|f(x)+\lambda h'(x)|\leqslant 1. \tag{1}$$

但 $\lim_{x\to c} h(x)=-\infty$, 而 (c,d) 是有界区间, 可见 h' 在 (c,d) 上是无界的 (参看本章问题 7). 由 (1) 可知, 它与 f 在 $[a,b]$ 上连续从而在 (c,d) 上有界的性质发生矛盾.

16. **(Rolle 定理)** 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数并且在开区间 (a,b) 内可微. 若 $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=0.$$

Rolle 定理是微分学中最基本、最重要的定理之一, 其应用颇广. 关于 Rolle 定理的证明在许多数学分析教程中大多千篇一律, 多年不变. 这里介绍的两个新证明分别属于 Abian[20] 和 Samelson[70]. 第一个证明是构造性的, 即证明本身不仅仅是论证了满足定理结论中 $f'(c)=0$ 的 c 的存在性, 而且还给出了寻求它的实际计算途径. 而第二个证明则是纯粹的存在性证明. 这两个证明各有特色, 而又都富于启发性.

证法 1　记

$$a_0=a,\quad b_0=b,\quad m_0=\frac{b_0+a_0}{2},\quad p_0=\frac{m_0+a_0}{2},\quad q_0=\frac{b_0+m_0}{2}.$$

我们不妨设 $f(m_0)\geqslant 0$ (相反的情形留给读者). 从 m_0,p_0,q_0 这三个数中选一个出来记为 m_1 使得

$$f(m_1)=\max\{f(m_0),f(p_0),f(q_0)\}$$

(当这三个函数值中有两个以至三个值相等时, 我们在选取 m_1 时按照 m_0,p_0,q_0 的排列次序左边的优先当选). 并令

$$a_1=m_1-\frac{b_0-a_0}{4},\quad b_1=m_1+\frac{b_0-a_0}{4},\quad p_1=\frac{m_1+a_1}{2},\quad q_1=\frac{b_1+m_1}{2}.$$

从 m_1,p_1,q_1 这三个数中又选一个出来记为 m_2 使得

$$f(m_2)=\max\{f(m_1),f(p_1),f(q_1)\}$$

(特殊情况下的选取规则同上). 并令

$$a_2=m_2-\frac{b_1-a_1}{4},\quad b_2=m_2+\frac{b_1-a_1}{4},\quad p_2=\frac{m_2+a_2}{2},\quad q_2=\frac{b_2+m_2}{2}.$$

如此继续下去, 得到一列闭区间

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots,$$

并显然满足

$$f(m_i)\geqslant f(a_i),\quad f(m_i)\geqslant f(b_i). \tag{1}$$

因此存在 $c\in[a,b]$ 使得

$$\lim_{i\to\infty}a_i=\lim_{i\to\infty}b_i=\lim_{i\to\infty}m_i=c\quad(a_i\leqslant c\leqslant b_i).$$

据 f 的连续性, 有

$$\lim_{i\to\infty}f(a_i)=\lim_{i\to\infty}f(b_i)=\lim_{i\to\infty}f(m_i)=f(c).$$

不难看出, $c\in(a,b)$. 事实上, 如果有某个 $f(m_i)>0$, 显然 $f(c)>0$, 故 $c\neq a,b$. 如果 $f(m_i)=0\ (i=0,1,2,\cdots)$, 则由区间 $[a_i,b_i]$ 的做法可知 $c=m_0$.

由 (1) 式得到

$$\frac{f(c)-f(a_i)}{c-a_i} \geqslant 0, \quad \frac{f(b_i)-f(c)}{b_i-c} \leqslant 0. \tag{2}$$

令 $i \to \infty$, 由 (2) 得 $f'(c)=0$ $(c \in (a,b))$.

证法 2 这种证明基于下面两个事实:

(a) 如果 f 在闭区间 $[c,d]$ 上连续并且 $f(c)=f(d)$, 那么存在 $\alpha, \beta \in [c,d]$ 满足 $\beta-\alpha=\frac{d-c}{2}$ 及 $f(\alpha)=f(\beta)$. 事实上, 可以考虑

$$g(x)=f\left(x+\frac{d-c}{2}\right)-f(x).$$

显然 $g\left(\frac{c+d}{2}\right)=-g(c)$. 于是应用介值定理得知结论成立.

(b) 如果 f 在某内点 x 处可微, 那么对于任意两个数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 满足 $\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n, \alpha_n \to x, \beta_n \to x$ $(n \to \infty)$, 差商 $\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ 当 $n \to \infty$ 时收敛于 $f'(x)$ (证明基于下列事实: 当 $\alpha_n < x < \beta_n$ 时, 上述差商介于 $\frac{f(\beta_n)-f(x)}{\beta_n-x}$ 与 $\frac{f(x)-f(\alpha_n)}{x-\alpha_n}$ 之间).

现在转向 Rolle 定理的证明: 重复应用 (a), 我们得出 $[a,b]$ 的子区间列 $[\alpha_n,\beta_n]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 满足: (i) $\beta_n-\alpha_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$, (ii) $f(\alpha_n)=f(\beta_n)$, (iii) $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}] \subset [\alpha_n,\beta_n]$ $(n=0,1,2,\cdots;[\alpha_0,\beta_0] \equiv [a,b])$. 这里需要特别说明一下选取 $[\alpha_2,\beta_2]$ 时应注意的规则: 假如已确定 $[\alpha_1,\beta_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ $\left(f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. 如果 $f\left(\frac{3a+b}{4}\right), f\left(\frac{a+3b}{4}\right)$ 之一又恰巧等于 $f(a)$ 时, 我们规定选取 $\left[\frac{3a+b}{4},\frac{a+b}{2}\right]$ 或者 $\left[\frac{a+b}{2},\frac{a+3b}{4}\right]$ 为 $[\alpha_2,\beta_2]$. 这样, 显然 $\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 有相同的极限 c $(\alpha_n \leqslant c \leqslant \beta_n)$, 并且 $c \neq a,b$. 应用 (b) 易知 $f'(c)=0$ $(a<c<b)$.

注 Abian 和 Samelson 给出的 Rolle 定理的新证明是利用了闭区间套定理. 1981 年, 朱永庚 [3] 利用有限覆盖定理证明了 Rolle 定理. 1987 年, 冯平道 [1] 利用 Dedekind 分割定理证明了 Rolle 定理. 读者如有兴趣, 可参看他们的原文.

17. 设 f 在有界或无界区间 (a,b) 上可微, 且 $\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)$. 证明存在 $c \in (a,b)$, 使

$$f'(c)=0.$$

证 先设 (a,b) 有界且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x)=k.$$

令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ k, & x=a \text{ 或 } x=b, \end{cases}$$

则 F 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可微, 且 $F(a)=F(b)$. 由 Rolle 定理, 存在 $c \in (a,b)$ 而有 $F'(c)=0$. 即 $f'(c)=0$.

次设 (a,b) 为无界区间且 k 为有限数, 则对充分小的 $\varepsilon > 0$, 直线 $y = k + \varepsilon$ 或 $y = k - \varepsilon$ 与曲线 $y = f(x)$ 至少有两个交点. 设交点的横坐标为 $c_1, c_2 (c_1 < c_2)$, 则在闭区间 $[c_1, c_2]$ 上, f 满足 Rolle 定理的条件, 故存在 $c \in (c_1, c_2) \subset (a,b)$ 使 $f'(c) = 0$.

最后, 设 $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, 此时无论 (a,b) 是否有界, 方程 $f(x) = A$ (A 为固定的充分大的正数) 总有两个不同的实根, 记为 α_1, α_2. 将 Rolle 定理应用于 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 上, 则存在 $c \in (\alpha_1, \alpha_2) \subset (a,b)$ 而有 $f'(c) = 0$.

同理可证, 当 $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty$ 时, 也存在 $c \in (a,b)$ 而有 $f'(c) = 0$.

18. **(微分学基本定理)**　设 f 在 $[a,b]$ 上可微. 若对每一 $x \in [a,b], f'(x) = 0$, 则 f 必为常值函数.

证　我们这里介绍的一种初等证明属于 Richmond[69].

设 $f' \equiv 0$ 而 f 为非常值函数, 则存在 $u, v \in [a,b], u < v$, 使得 $f(u) \neq f(v)$. 于是, 连接 $(u, f(u))$ 与 $(v, f(v))$ 的弦有异于零的斜率. 因此

$$f(v) - f(u) = c(v - u) \quad \text{或} \quad \Delta f = c\Delta x \ (c \neq 0). \tag{1}$$

假定 $c > 0$, 平分 $[u,v]$ 并设分点为 w. 若

$$f(v) - f(w) < c(v - w),$$

且

$$f(w) - f(u) < c(w - u),$$

则

$$f(v) - f(u) < c(v - u).$$

这与 (1) 矛盾. 因此, $[u,w]$ 中或 $[w,v]$ 中至少有一个使 $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant c$, 记此区间为 $[u_1, v_1]$. 仿照上述程序, 我们可以做出闭区间套列 $[u_n, v_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 使在这些区间上都有

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant c.$$

设 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = x \in [u,v]$. 若 $c > 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(v_n) - f(u_n)}{v_n - u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) > 0,$$

这与 $f'(x) = 0$ 矛盾. 同理可证, $c < 0$ 不成立. 因此, $c = 0$, 从而 $f(v) = f(u)$, 但这又与反证法的假设矛盾. 证毕.

注　同样可证, 若在 $[a,b]$ 上 $f'(x) \geqslant 0$, 则当 $v > u$ 时 $f(v) \geqslant f(u)$; 若 $f'(x) \leqslant 0$, 则当 $v > u$ 时 $f(v) \leqslant f(u)$.

微分学基本定理还可推广: 若 $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 则

$$m(v-u) \leqslant f(v)-f(u) \leqslant M(v-u).$$

这只要在证明过程中分别把 $c>0$ 代以 $c>M$ 和 $c<0$ 代以 $c<m$ 即可.

19. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可微, f' 连续、递减且 $f'(b)>0$. 证明: (i) $b_n = f^{-1}[f(b_{n-1})-f'(b_{n-1})(b_{n-1}-a)]$ 存在且满足 $a<b_n<b_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots;b_0=b)$. (ii) 数列 $\{f(b_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

证 (i) 据微分中值定理, 存在 $\zeta, a<\zeta<b$, 使得

$$f(a)=f(b)-f'(\zeta)(b-a).$$

由于 f' 递减且 $f'(b)>0$, 故

$$f(a)<f(b)-f'(b)(b-a)<f(b).$$

由题设可知 f 在 $[a,b]$ 上递增且连续, 故 f^{-1} 在 $[f(a),f(b)]$ 上存在且也是递增的连续函数. 于是, $b_1=f^{-1}[f(b)-f'(b)(b-a)]$ 存在且满足 $a<b_1<b$.

现设 b_n 存在且满足 $a<b_n<b_{n-1}$. 如同前面一样, 在 $[a,b_n]$ 上应用微分中值定理, 有

$$f(a)<f(b_n)-f'(b_n)(b_n-a)<f(b_n).$$

因此, 数 $b_{n+1}=f^{-1}[f(b_n)-f'(b_n)(b_n-a)]$ 存在且满足 $a<b_{n+1}<b_n$.

(ii) 数列 $\{b_n\}$ 递减且有下界 a, 故 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在. 令 $\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$, 则 $a \leqslant x_0 < b$. 因

$$f(b_n)=f(b_{n-1})-f'(b_{n-1})(b_{n-1}-a),$$

故由 f 及 f' 在 x_0 的连续性可知

$$f(x_0)=f(x_0)-f'(x_0)(x_0-a).$$

于是 $x_0=a$ 且 $\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(a)$. 因数列 $\{b_n\}$ 是递减的, 故数列 $\{f(b_n)\}$ 也是递减的.

注 若 f' 在 $[a,b]$ 上连续且递增, $f'(a)>0$, 则 $\{f(a_n)\}$ 递增且趋于 $f(b)$, 这里

$$a_n=f^{-1}[f(a_{n-1})+f'(a_{n-1})(b-a_{n-1})].$$

这个问题是由 Evans[40] 得到的.

20. **(导数的介值定理)** 若 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(a)\neq f'(b)$, 则对于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任一数 μ, 必有一点 $c\in(a,b)$, 使 $f'(c)=\mu$.

赵根榕和熊必璠[16] 给出了导数的介值定理的几种证明, 兹介绍如下:

证法 1　不妨设 $f'(a)<\mu<f'(b)$.

做一辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\mu x, x\in[a,b]$. 因 f 在 $[a,b]$ 上可微, 故 φ 也在 $[a,b]$ 上可微, 由于 φ 在 $[a,b]$ 上连续, 故在 $[a,b]$ 上能达到最小值. 设 $\varphi(\zeta)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

若 $\zeta\in(a,b)$, 因 φ 在 $[a,b]$ 上可微, 故 $\varphi'(\zeta)=f'(\zeta)-\mu=0$, 即 $f'(\zeta)=\mu$.

若 $\zeta=a$ 或 b, 即 $\varphi(a)$ 或 $\varphi(b)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值. 即对 $x\in[a,b],\varphi(a)\leqslant\varphi(x)$ 或 $\varphi(b)\leqslant\varphi(x)$. 但这是不可能的, 理由如下: 若对 $x\in[a,b],\varphi(a)\leqslant\varphi(x)$, 则有

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\geqslant 0,\quad \lim_{x\to a+0}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\varphi'(a)\geqslant 0.$$

而 $\varphi'(a)=f'(a)-\mu\geqslant 0$, 即 $f'(a)\geqslant\mu$. 这和 $f'(a)<\mu$ 矛盾. 因此 ζ 不可能是 a. 同理 ζ 不可能是 b.

因此, ζ 只能在 (a,b) 内, 问题得到证明.

证法 2　做函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$$

由于 f 在 a 处可微,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

故 g 在 $[a,b]$ 上连续. 由连续函数的介值定理知, 对 $g(b)$ 和 $f'(a)$ 之间的任何值 μ_1, 必存在 $\zeta\in(a,b)$ 使 $g(\zeta)=\mu_1$.

又由微分中值定理,

$$g(\zeta)=\frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta-a}=f'(c_1),\quad a<c_1<\zeta,$$

故存在 $c_1\in(a,b)$, 使 $f'(c_1)=\mu_1$.

同理做函数

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, & a\leqslant x<b,\\ f'(b), & x=b.\end{cases}$$

h 在 $[a,b]$ 上连续, 由连续函数介值定理, 对 $h(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的任意值 μ_2, 必存在 $\eta\in(a,b)$ 而有 $h(\eta)=\mu_2$. 由微分中值定理, 存在 $c_2\in(a,b)$, 使 $f'(c_2)=\mu_2$.

因为 $g(b)=h(a), f'(a)\neq f'(b)$, 故对于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的任一数, 或属于 $f'(a)$ 和 $g(b)$ 之间, 或属于 $f'(b)$ 和 $h(a)=g(b)$ 之间, 或等于 $g(b)$. 前二情况已证明存在一点

$$c=\begin{cases}c_1, & \text{若 } \mu \text{ 在 } f'(a) \text{ 和 } g(b) \text{ 之间},\\ c_2, & \text{若 } \mu \text{ 在 } f'(b) \text{ 和 } g(b) \text{ 之间},\end{cases}$$

使得 $f'(c)=\mu, c\in(a,b)$.

若 $\mu=g(b)$, 由微分中值定理:

$$\mu=g(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\quad a<c<b.$$

证法 3 不妨设 $f'(a)<\mu<f'(b)$.

取 A 和 B 满足 $f'(a)<A<\mu<B<f'(b)$.

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<A,$$

$$f'(b)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}>B.$$

于是存在 $\delta>0$, 当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时, 有

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<A,\quad \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}>B.$$

取 $0<\delta^*<\min\left\{\delta,\frac{b-a}{2}\right\}$, 即有

$$\frac{f(a+\delta^*)-f(a)}{\delta^*}<A,$$

$$\frac{f(b-\delta^*)-f(b)}{-\delta^*}=\frac{f(b'+\delta^*)-f(b')}{\delta^*},$$

其中 $b'=b-\delta^*$ (显然 $a<b'<b$). 考虑函数

$$g(x)=\frac{f(x+\delta^*)-f(x)}{\delta^*},$$

它在 $[a,b']$ 上连续, 且

$$g(a)=\frac{f(a+\delta^*)-f(a)}{\delta^*}<A,$$

$$g(b')=\frac{f(b'+\delta^*)-f(b')}{\delta^*}>B.$$

因 $A<\mu<B$, 由连续函数介值定理, 存在 $\zeta\in(a,b')$, 使

$$g(\zeta)=\frac{f(\zeta+\delta^*)-f(\zeta)}{\delta^*}=\mu.$$

由微分中值定理, 存在一点 $c\in(\zeta,\zeta+\delta^*)$,

$$\frac{f(\zeta+\delta^*)-f(\zeta)}{\delta^*}=f'(c),$$

即有 $f'(c)=\mu$. 又由于 $\zeta\in(a,b')$, 即 $a<\zeta<b'$, 应有 $a<\zeta+\delta^*<b'+\delta^*=b$. 而 $c\in(\zeta,\zeta+\delta^*)$, 故 $c\in(a,b)$.

证法 4　先说明导数的介值定理与下一定理等价.

定理　若 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(x)\neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于 0 或恒小于 0.

证明等价. 若定理成立, 不妨设 $f'(a)<u<f'(b)$. 做

$$\varphi(x)=f(x)-\mu x,\quad x\in[a,b],$$

则

$$\varphi'(x)=f'(x)-\mu,\quad \varphi'(a)=f'(a)-\mu<0,\quad \varphi'(b)=f'(b)-\mu>0.$$

这说明 $\varphi(x)$ 的导函数在 $[a,b]$ 上变号. 若不存在一点 $c\in(a,b)$, 使 $\varphi'(c)=0$, 即 $\varphi'(x)\neq 0, x\in[a,b]$. 由定理知 $\varphi'(x)$ 或恒大于 0 或恒小于 0, 这和 $\varphi'(a)<0,\varphi'(b)>0$ 矛盾. 因此有一点 $c\in(a,b)$ 使 $\varphi'(c)=0$, 即 $f'(c)=\mu$.

再设导数的介值定理成立, 证明定理成立. 设在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$, 而 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒大于 0 或不恒小于 0, 即 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可变号. 因此, 必存在两点 $x_1,x_2\in[a,b]$, 且 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 异号. 对介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 中的数 0, 由导数的介值定理必存在 $c\in(a,b)$, 使 $f'(c)=0$, 这和在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$ 矛盾. 因此, 若在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于 0 或恒小于 0.

现在证明定理.

首先注意到, 由于 $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$, 在 $[a,b]$ 中不可能有两点 x_1,x_2, 使 $f(x_1)=f(x_2)$. 否则由 Rolle 定理, 必有一点 $\zeta\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$, 使 $f'(\zeta)=0$, 和 $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$ 矛盾. 从而在 $[a,b]$ 内任两点 $f(x)$ 的值不可能相等.

其次在 $[a,b]$ 内, 不妨设 $f(a)>f(b)$. 此时可证得 $f'(x)<0, x\in[a,b]$. 若不然, 必存在一点 c, 使 $f'(c)>0$. 因

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)>0$$

(可设 $c\neq a$), 即有 $f(c+\Delta x)-f(c)>0$, 故存在 $d>c$, 使 $f(c)<f(d)$.

若 $f(c)<f(b)$, 由于 $f(b)<f(a)$, 则在 $[a,c]$ 中必有一点, 使 $f(x)$ 取得其介值 $f(b)$, 从而在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 有相等值, 与上证矛盾. 故 $f(c)<f(b)$ 不可能.

若 $f(c)>f(b)$, 由于 $f(c)<f(d)$, 故在 $[d,b]$ 中有一点, 使 $f(x)$ 取得 $f(b)$ 和 $f(d)$ 的介值 $f(c)$, 因此 $f(c)>f(b)$ 不可能. 显然 $f(c)=f(b)$ 也不可能. 这正说明若在 $[a,b]$ 上 $f(a)>f(b), f'(x)\neq 0$, 不可能有一点 c, 使 $f'(c)>0$, 从而证明了在 $[a,b]$ 上 $f'(x)<0$.

若 $f(a)<f(b)$, 同理可证若 $f'(x)\neq 0$, 则 $f'(x)>0, x\in[a,b]$.

注　连续函数有介值性质, 而某些不连续函数也可能有介值性质 (参看第二章反例 46), 导数的介值定理也说明了这一事实.

21. 设 $f(x)-f(0)=xf'[\zeta(x)]$, 其中 $0<\zeta(x)<x$. 证明: 若 $f(x)=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$, $f(0)=0$, 则函数 $\zeta=\zeta(x)$ 在任意小的区间 $(0,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 内是不连续的.

证 (反证法) 假定 $\zeta(x)$ 在某个区间 $(0,\varepsilon)$ 内连续. 因为当 $x>0$ 时

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln x\right),$$

所以由 $f(x)-f(0)=xf'[\zeta(x)]$ 得到

$$x\sin(\ln x)=x\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\zeta(x)\right),$$

即

$$\sin(\ln x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\zeta(x)\right),\quad 0<x<+\infty.$$

取充分大的正整数 n_0, 使

$$-2n_0\pi+\frac{\pi}{4}<\ln\zeta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0<\zeta(x)<x$ 知 $\lim_{x\to0+}\zeta(x)=0$, 从而

$$\lim_{x\to0+}\ln\zeta(x)=-\infty.$$

因此, 存在 $\delta\left(0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}\right)$, 使

$$\ln\zeta(\delta)<-2n_0\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln\zeta(x)$ 在 $\left[\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上是连续的, 故据连续函数介值定理, 必有 $x_0\in\left(\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 使得

$$\ln\zeta(x_0)=-2n_0\pi+\frac{\pi}{4}.$$

由此得到

$$1\geqslant\sin(\ln x_0)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\ln\zeta(x_0)\right)=\sqrt{2},$$

这是不可能的, 故 $\zeta(x)$ 在 $(0,\varepsilon)$ 内不连续.

22. 设函数 f 在 $[0,c]$ $(c>0)$ 上可微, f' 在 $[0,c]$ 上递减, 且 $f(0)=0$. 证明对于 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$, 恒有

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

证 当 $a=0$ 时, 式中等号成立, 故结论为真.

若 $a>0$, 在 $[0,a]$ 上应用微分中值定理, 可知存在 ζ_1 $(0<\zeta_1<a)$, 使得

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\zeta_1).$$

同理, 在 $[b,a+b]$ 上应用微分中值定理, 可知存在 ζ_2 $(b<\zeta_2<a+b)$, 使得

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}=\frac{f(a+b)-f(b)}{(a+b)-b}=f'(\zeta_2).$$

显然, $0<\zeta_1<a\leqslant b<\zeta_2<a+b\leqslant c$. 因 f' 在 $[0,c]$ 上递减, 故 $f'(\zeta_2)\leqslant f'(\zeta_1)$, 即

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}\leqslant\frac{f(a)}{a},$$

从而

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

23. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$. 证明方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有两个根.

证 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$. 因若不然, 只要考虑 $-f$ 就行了.

由导数定义知, 既然 $f'(a)>0$, 必有一点 a_1 $(a<a_1<b)$, 使

$$f(a_1)>f(a)=0.$$

同理有 b_1 $(a_1<b_1<b)$, 使 $f(b_1)<0$. 因而由连续函数介值定理知必有一点 $c\in(a_1,b_1)$ 使 $f(c)=0$. 这样一来, 在闭区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别应用 Rolle 定理, 便知有 $\zeta\in(a,c)$ 与 $\eta\in(c,b)$, 使

$$f'(\zeta)=f'(\eta)=0.$$

24. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上二阶可微, 且 $f(x)\geqslant 0, f''(x)\geqslant 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$; 再设 f 在 $[a,b]$ 的任一子区间上不恒等于零. 证明方程 $f(x)=0$ 在区间 $[a,b]$ 上最多只有一个根.

证 (反证法) 设存在 x_1,x_2 $(a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$, 使得 $f(x_i)=0$ $(i=1,2)$. 由 Rolle 定理, 存在 c $(x_1<c<x_2)$, 使得

$$f'(c)=0.$$

在区间 $[a,b]$ 上, 因 $f''(x)\geqslant 0$, 故 f' 递增. 于是当 $x<c$ 时 $f'(x)\leqslant 0$. 此时有下列两种可能:

(i) 当 $x_1<x<c$ 时, 恒有 $f'(x)=0$. 因 f' 在 $[a,b]$ 上连续, 故

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1+0}f'(x)=0,$$

即在区间 $[x_1,c]$ 上, $f(x)\equiv 0$, 与条件矛盾.

(ii) 存在 c_1 $(x_1<c_1<c)$, 使 $f'(c_1)<0$. 于是在 $[x_1,c_1]$ 上, $f'(x)\leqslant f'(c_1)<0$, 即在区间 $[x_1,c_1]$ 上, f 严格递减. 据反证法的假设, $f(x_1)=0$, 因此当 $x_1<x\leqslant c_1$ 时, $f(x)<f(x_1)=0$, 与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾.

综上所述, 可知在区间 $[a,b]$ 上, 方程 $f(x)=0$ 最多只有一个根.

25. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明对任一实数 λ, 存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f'(c)=\lambda f(c)$.

证 令 $F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$, 则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $F(a)=F(b)=0$. 由 Rolle 定理, 存在 $c\in(a,b)$ 使得 $F'(c)=0$. 因

$$F'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}f(x)+e^{-\lambda x}f'(x),$$

故 $-\lambda e^{-\lambda c}f(c)+e^{-\lambda c}f'(c)=0$, 即

$$f'(c)=\lambda f(c).$$

26. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, 对某点 $a\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(a)=0$, 且

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)|.$$

证明 $f\equiv 0$.

证 先证在 $a\leqslant y\leqslant a+1$ 上, $f(y)\equiv 0$. 因为

$$|f(y)|=|f(y)-f(a)|=|f'(x_1)||y-a|\quad(a<x_1<y<a+1),$$

且由题设知 $|f'(x_1)|\leqslant|f(x_1)|$, 所以

$$|f(y)|\leqslant|f(x_1)||y-a|.$$

同理

$$\begin{aligned}|f(x_1)|&=|f(x_1)-f(a)|=|f'(x_2)||x_1-a|\\&\leqslant|f(x_2)||x_1-a|\quad(a<x_2<x_1<y).\end{aligned}$$

依此类推, 得到

$$\begin{aligned}|f(y)|&\leqslant|f(x_1)||y-a|\leqslant|f(x_2)||x_1-a||y-a|\\&\leqslant\cdots\leqslant|f(x_n)||x_{n-1}-a|\cdots|x_1-a||y-a|,\end{aligned}$$

其中 $a<x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1<y<a+1$. 因 f 在 $[a,a+1]$ 上连续, 故有界, 设 $|f(x)|\leqslant M, x\in[a,a+1]$. 又, $x_1-a<1$, 故

$$|f(y)|\leqslant M|x_1-a|^{n-1}\to 0\quad(n\to\infty).$$

于是在 $[a,a+1]$ 上 $f(y)\equiv 0$.

再由 $f(a+1)=0$ 将上述推理用于 $[a+1,a+2]$ 上成立, 即得 $f(x)\equiv 0, x\in[a+1,a+2]$. 同理可得在 $[a+2,a+3],\cdots,[a+n,a+n+1]$ 上均有 $f(x)\equiv 0$. 因此在 $[a,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$.

同理可证, 在 $(-\infty,a]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

27. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 又, f 不是线性函数. 证明存在一点 $c\in(a,b)$, 使

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

证 令

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),$$

则 $g(a)=f(a),g(b)=f(b)$. 据题设, $f(x)\not\equiv g(x)$, 故存在 $c\in(a,b)$ 使

$$f(c)\neq g(c).$$

不妨设 $f(c)>g(c)$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{g(c)-g(a)}{c-a}&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\&=\frac{g(b)-g(c)}{b-c}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.\end{aligned}$$

在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上对 f 用微分中值定理, 则存在 c_1,c_2 $(a<c_1<c<c_2<b)$, 使

$$\begin{aligned}f'(c_1)&=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\\&=f'(c_2).\end{aligned}$$

故当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ 时, 有 $f'(c_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$. 而当 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时, 有 $f'(c_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$. 总之, 存在 $c\in(a,b)$ 使 $|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

28. 设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$. 证明: (i) 对任意正整数 n, 方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 内有且只有一个根.

(ii) 设 $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根, 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}.$$

证 (i) 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 下设 $n>1$. 令 $y=\cos x$, 则

$$f_n(x)=g_n(y)=y+y^2+\cdots+y^n.$$

在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上考虑函数 $h_n(y)=g_n(y)-1$. 因 $h_n(y)$ 连续, 且

$$h_n\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0,\quad h_n(1)=n-1>0,$$

故存在 $y_n\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $h_n(y_n)=0$. 又因当 $y\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 时,

$$h_n'(y)=1+2y+\cdots+ny^{n-1}>1,$$

故 $h_n(y)$ 严格递增, 于是 y_n 是唯一的. 而 $y=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上严格递减, 故对每个 y_n, 存在唯一的 $x_n=\arccos y_n\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 满足要求.

(ii) 由微分中值定理, 存在 $\zeta\in\left(\frac{1}{2},y_n\right)$, 使得

$$\left|h_n(y_n)-h_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|=|h_n'(\zeta)|\left|y_n-\frac{1}{2}\right|.$$

因 $h_n(y_n)=0, h_n\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n, |h_n'(\zeta)|>1$, 故 $\left|y_n-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$, 从而 $y_n\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$, 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\arccos y_n=\frac{\pi}{3}.$$

29. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 又 $f(x)>0\ (a<x<b)$. 证明不存在常数 $M>0$, 使得

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant M\quad(a<x<b).$$

证 (反证法) 假设存在 $M>0$, 使得

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant M\quad(a<x<b).$$

令 $g(x)=\ln f(x)\ (a<x<b)$. 在 (a,b) 内任取一点 x_0, 由微分中值定理知对任意 $x\in(a,b)$, 在 x_0,x 之间必存在一点 ζ, 使得

$$g(x)-g(x_0)=g'(\zeta)(x-x_0).$$

于是

$$|g(x)|\leqslant|g(x_0)|+M(b-a),$$

故 g 在 (a,b) 上有界.

另一方面, 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a)=0, f(x)>0\ (a<x<b)$, 因而

$$\lim_{x\to a+0}g(x)=\lim_{x\to a+0}\ln f(x)=-\infty.$$

故 g 在 (a,b) 上无界, 矛盾.

30. 设 f 在 $[0,a]$ 上二次可微, $|f''(x)|\leqslant M, 0\leqslant x\leqslant a$; 又设 f 在 $(0,a)$ 内取最大值. 证明

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

证 由题设知存在 $c\in(0,a)$, 使 $f(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant a}f(x)$, 因此 $f'(c)=0$. 据微分中值定理可得

$$f'(0)=f'(c)-f''(\zeta_1)c=-f''(\zeta_1)c,$$
$$f'(a)=f'(c)+f''(\zeta_2)(a-c)=f''(\zeta_2)(a-c).$$

因此

$$|f'(0)| \leqslant Mc, \quad |f'(a)| \leqslant M(a-c),$$

所以

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma.$$

31. 设 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$. 证明存在一点 $\zeta \in (a,b)$, 使

$$f'(\zeta) + f(\zeta)g'(\zeta) = 0.$$

证 欲证 $f'(\zeta)+f(\zeta)g'(\zeta)=0$, 相当于证明

$$e^{g(\zeta)}[f'(\zeta)+f(\zeta)g'(\zeta)] = 0,$$

这只要证明 $(f(x)e^{g(x)})'|_{x=\zeta}=0$. 为此做辅助函数

$$F(x) = f(x)e^{g(x)},$$

就有

$$F'(x) = e^{g(x)}[f'(x)+f(x)g'(x)].$$

显然, F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且由条件 $f(a)=f(b)=0$ 知道 $F(a)=F(b)=0$. 由 Rolle 定理可知, 存在点 $\zeta \in (a,b)$, 使得 $F'(\zeta)=0$, 即

$$e^{g(\zeta)}[f'(\zeta)+f(\zeta)g'(\zeta)] = 0.$$

因 $e^{g(\zeta)} \neq 0$, 故

$$f'(\zeta) + f(\zeta)g'(\zeta) = 0.$$

32. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微, 且 $f(a)>0, f'(a)<0$, 当 $x>a$ 时 $f''(x) \leqslant 0$. 证明: 在 $(a,+\infty)$ 内, 方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个根.

证 因 $x>a$ 时 $f''(x) \leqslant 0$, 故 f' 在 $(a,+\infty)$ 上递减, 从而当 $x>a$ 时

$$f'(x) \leqslant f'(a) < 0.$$

由此又可推出, 当 $x \geqslant a$ 时 $f(x)$ 严格递减. 于是 $f(x)=0$ 最多仅有一个根. 而 $x>a$ 时

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) \leqslant f'(a)(x-a),$$

即

$$f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

而右端当 $x \to +\infty$ 时, 它趋于 $-\infty$, 故当 x 充分大时, 就有 $f(x)<0$, 即存在 $b>a$ 而有 $f(b)<0$. 据连续函数介值定理, 存在 $\zeta \in (a,b)$, 而有

$$f(\zeta) = 0.$$

综上所述, 方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

33. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, ζ 为 (a,b) 内一定点, $f(\zeta)>0,(x-\zeta)f'(x)\geqslant 0$. 证明 f 在 $[a,b]$ 上恒取正值.

证 当 $x\in[a,\zeta]$ 时 $x-\zeta\leqslant 0$, 而

$$(x-\zeta)f'(x)\geqslant 0,$$

故有 $f'(x)\leqslant 0$, 这说明 f 在 $[a,\zeta]$ 上是递减的. 于是

$$f(x)\geqslant f(\zeta)>0.$$

当 $x\in[\zeta,b]$ 时, $x-\zeta\geqslant 0$, 从而 $f'(x)\geqslant 0$, 这说明 f 在 $[\zeta,b]$ 上是递增的. 于是

$$f(x)\geqslant f(\zeta)>0.$$

综上所述, f 在 $[a,b]$ 上恒大于零.

34. 给定函数

$$f(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}.$$

证明: 当 n 为奇数时, $f(x)=0$ 只有一个实根; 当 n 为偶数时, $f(x)=0$ 没有实根.

证 设 n 为奇数 $2m+1$, 因

$$f(x)=(1-x)+x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}\right)+\cdots+x^{2m}\left(\frac{1}{2m}-\frac{x}{2m+1}\right),$$

故当 $x>2$ 时各项都小于 0, 从而 $f(x)<0$; 而当 $x\leqslant 1$ 时各项都大于或等于 0 (只有第一项可能为 0), 从而 $f(x)>0$. 据连续函数介值定理, 存在 $c\in(-\infty,+\infty)$ 使 $f(c)=0$.

兹证方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=c$. 事实上,

$$\begin{aligned}f'(x)&=-1+x-x^2+\cdots+x^{2m-1}-x^{2m}\\&=-(1-x)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2m-2})-x^{2m},\end{aligned}$$

当 $x<1$ 时, $f'(x)<0$. 又, $f'(x)$ 还可表成:

$$\begin{aligned}f'(x)&=-1+x(1-x)+x^3(1-x)+\cdots+x^{2m-1}(1-x)\\&=-1+(1-x)(x+x^3+\cdots+x^{2m-1}),\end{aligned}$$

当 $x\geqslant 1$ 时 $f'(x)<0$. 因此, 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 均有 $f'(x)<0$, 可见 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递减, 从而 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=c$.

设 n 为偶数 $2m$. 因

$$\begin{aligned}f'(x)&=-1+x-x^2+x^3-x^4+\cdots+x^{2m-1}\\&=-(1-x)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2m-2}),\end{aligned}$$

故由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$, 即 f 只有在 $x=1$ 处有可能取得极值. 又,

$$f''(x)=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(2m-1)x^{2m-2},$$

故 $f''(1)=1-2+3-4+\cdots+(2m-1)>0$, 因而 f 只在 $x=1$ 处取得极小值. 由于

$$f(1)=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{1}{2m}>0,$$

因而对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有 $f(x)\geqslant f(1)>0$, 可见方程 $f(x)=0$ 没有实根.

35. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微, $f''>0$. 又设存在一点 x_0, 使 $f(x_0)<0$, 且

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha<0,\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\beta>0.$$

证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

证 因 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\beta>0$, 故存在 $a>x_0$ 使 $f'(a)>0$. 据 Taylor 公式可得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2\\&\geqslant f(a)+f'(a)(x-a),\quad a<\xi<x,\end{aligned}$$

故 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 又 $f(x_0)<0$, 因此由连续函数介值定理知, 存在 $x_1\in(x_0,+\infty)$ 使 $f(x_1)=0$. 同理可证存在 $x_2\in(-\infty,x_0)$ 使 $f(x_2)=0$.

若存在 $x_1<x_2<x_3$ 使 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$, 则在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上应用 Rolle 定理, 存在 $x_1<\zeta_1<x_2<\zeta_2<x_3$ 而使 $f'(\zeta_1)=f'(\zeta_2)=0$, 因此在 $[\zeta_1,\zeta_2]$ 上再次使用 Rolle 定理, 存在 ζ 使 $f''(\zeta)=0$. 这与 $f''(x)>0$ 矛盾. 由此可见 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

36. 设 f 在 $[0,2]$ 上二次可微, 且 $|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 1,x\in[0,2]$. 证明

$$|f'(x)|\leqslant 2,\quad x\in[0,2].$$

证 由 Taylor 公式得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\zeta_1)}{2}x^2,\quad 0<\zeta_1<x,$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\zeta_2)}{2}(2-x)^2,\quad x<\zeta_2<2.$$

两式相减并整理得

$$2f'(x)=f(2)-f(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\zeta_1)-\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\zeta_2),$$

故

$$\begin{aligned}|2f'(x)| &\leqslant |f(0)|+|f(2)|+\frac{1}{2}x^2|f''(\zeta_1)|+\frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\zeta_2)|\\&\leqslant 1+1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(2-x)^2\\&=2+\frac{x^2+(2-x)^2}{2}.\end{aligned}$$

而 $\max_{0\leqslant x\leqslant 2}\{x^2+(2-x)^2\}=4$, 故 $2|f'(x)|\leqslant 4$, 即 $|f'(x)|\leqslant 2$.

37. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微, 且

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\quad(k=0,1,2).$$

证明不等式

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

证 不妨设 f 为非常值函数, 于是由题设知 $M_2\neq 0$. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 及任意 $h>0$, 据 Taylor 公式得

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+f''(x+\theta_1h)\frac{h^2}{2},$$

$$f(x-h)=f(x)+(-h)f'(x)+f''(x-\theta_2h)\frac{h^2}{2},\quad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1.$$

两式相减得

$$2hf'(x)=f(x+h)-f(x-h)+[f''(x-\theta_2h)-f''(x+\theta_1h)]\frac{h^2}{2}.$$

因此

$$M_1\leqslant M_0h^{-1}+\frac{h}{2}M^2.$$

特别取 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ 得 $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$, 即

$$M_1^2\leqslant 2M_0M_2.$$

38. 设 f 在 $[a,b]$ 上二次可微, $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$. 证明存在 $\zeta\in(a,b)$ 使

$$|f''(\zeta)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 由 Taylor 公式及题设条件, 得到

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(x_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\quad x_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(x_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,\quad x_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right),$$

故

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)| &\leqslant \left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right| \\ &\leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(|f''(x_1)|+|f''(x_2)|).\end{aligned}$$

令 $|f''(\zeta)|=\max\{|f''(x_1)|,|f''(x_2)|\}$, 则

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\zeta)|,$$

即

$$|f''(\zeta)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

39. 研究函数

$$y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

取得极值的情况.

解

$$\begin{aligned}y' &= \left(1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} \\ &\quad -\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} \\ &= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}\end{aligned}$$

令 $y'=0$, 得 $x=0$.

(i) 当 n 为偶数时, $y'\leqslant 0$, 故 y 在 $x=0$ 处不取极值, 从而 y 没有极值.

(ii) 当 n 为奇数时, 若 $x<0$, 则 $y'>0$; 若 $x>0$, 则 $y'<0$. 因此, y 在 $x=0$ 处取得极大值 $y=1$.

40. 讨论方程 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 的实根情况.

解　令 $f(x)=xe^{-x}-a$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x}-a)=-a<0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x}-a)=-\infty, \tag{2}$$

$$f'(x)=e^{-x}(1-x).$$

当 $x<1$ 时, $f'(x)>0$, 故 f 在 $(-\infty,1)$ 上严格递增; 当 $x>1$ 时, $f'(x)<0$, 故 f 在 $(1,+\infty)$ 上严格递减. 因此, f 在 $x=1$ 处取得极大值

$$f(1)=e^{-1}-a.$$

由 (1), (2) 可知, 当 $e^{-1}-a<0$ 时, 方程 $xe^{-x}=a$ 无实根; 当 $e^{-1}-a>0$ 时, 它有两个不同的实根; 当 $e^{-1}-a=0$ 时, 它有唯一的实根 $x=1$.

反 例

1. 仅在一点连续并可微的函数.

函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x \text{ 为无理数},\\ 0, & x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

在 $x\neq 0$ 的点都间断, 而在 $x=0$ 处有导数 $f'(0)=0$. 这是因为当 h 是有理数时,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0,$$

而当 h 是无理数时,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^2-0}{h}=h\to 0\quad (h\to 0).$$

设 $f(x)=0$, 当 x 为有理数; $f(x)=x^2+x$, 当 x 为无理数. 则函数 f 也仅在 $x=0$ 处连续且可微, $f'(0)=1$.

注 上述反例表明, 函数 f 在某点可微, 只能保证 f 在该点连续, 而不能保证 f 在该点的某个邻域内连续.

2. 一个可微函数 f, 使 $|f|$ 不可微.

函数 $f(x)=x$ 在 R^1 上可微, 然而, $|f(x)|=|x|$ 在 $x=0$ 处并不可微.

注 由上述反例及第二章反例 12 可知, 函数 f 的可微性与 $|f|$ 的可微性之间并无内在联系.

3. 一个无处可微函数 f, 使 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ 存在.

设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

则 f 无处连续, 从而也无处可微.

但是, $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ 却存在, 这是因为当 x 为有理数时, $f(x)=1, f\left(x+\frac{1}{n}\right)=1$, 故

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=0;$$

而当 x 为无理数时, $f(x)=0, f\left(x+\frac{1}{n}\right)=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=0.$$

注　若 f 在点 x_0 可微, 则 $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$ 必定存在. 上述反例说明这个陈述反过来是不正确的.

4. 关于乘积函数可微性的例子.

关于乘积函数的可微性, 我们熟知定理: 若函数 f 与 g 在点 x_0 皆可微, 则乘积函数 fg 在点 x_0 亦可微. 但当 f 或 g 在 x_0 不可微时, 可以有下述各种不同的结果.

(a) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 可微, $g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可微, 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=0,$$

因而 fg 在 $x=0$ 处可微, 且 $(fg)'(0)=0$.

(b) $f(x)=x$ 在 $x=0$ 可微, $g(x)=\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 不可微, 而乘积函数

$$f(x)g(x)=|x|$$

在 $x=0$ 不可微.

(c) $f(x)=g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可微, 而乘积函数 $f(x)g=x^2$ 在 $x=0$ 处可微.

(d) 函数 $f(x)=g(x)=|x|^{\frac{1}{2}}$ 在 $x=0$ 处不可微, 乘积函数 $f(x)g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处也不可微.

综上所述, 可列出下表 (表 3–1).

表 3–1

	f 在 $x=x_0$	g 在 $x=x_0$	fg 在 $x=x_0$	例
1	可　微	可　微	可　微	定　理
2	可　微	不可微	可　微	(a)
3	可　微	不可微	不可微	(b)
4	不可微	不可微	可　微	(c)
5	不可微	不可微	不可微	(d)

5. 关于复合函数可微性的例子.

关于复合函数的可微性, 我们熟知定理: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微, $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 可微, 则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=x_0$ 可微. 但当 $g(y)$ 在 $y=y_0, f(x)$ 在 $x=x_0$ 不同时可微时, 可以有下述各种不同的结果.

(a) $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 可微, $g(y)=|y|$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不可微, 而复合函数

$$g[f(x)]=x^2$$

在 $x=0$ 可微.

(b) $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 可微, $g(y)=|y|$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不可微, 而复合函数

$$g[f(x)]=|\sin x|$$

在 $x=0$ 不可微.

(c) $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可微, $g(y)=y^2$ 在 $y_0=f(0)=0$ 可微, 而复合函数

$$g[f(x)]=x^2$$

在 $x=0$ 可微.

(d) $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可微, $g(y)=\sin y$ 在 $y_0=f(0)=0$ 可微, 复合函数

$$g[f(x)]=\sin|x|$$

在 $x=0$ 不可微.

(e) $f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$ 在 $x=0$ 不可微, $g(y)=2y+|y|$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不可微, 而复合函数

$$g[f(x)]=x$$

在 $x=0$ 可微.

(f) $f(x)=\sin|x|$ 在 $x=0$ 不可微, $g(y)=|y|$ 在 $y_0=f(0)=0$ 不可微, 复合函数 (在 $x=0$ 的某个邻域内)

$$g[f(x)]=|\sin|x||=\sin|x|$$

在 $x=0$ 不可微.

综上所述, 可列出下表 (表 3–2).

表 3–2

	$f(x)$ 在 $x=x_0$	$g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$	$g[f(x)]$ 在 $x=x_0$	例
1	可　微	可　微	可　微	定　理
2	可　微	不可微	可　微	(a)
3	可　微	不可微	不可微	(b)
4	不可微	可　微	可　微	(c)
5	不可微	可　微	不可微	(d)
6	不可微	不可微	可　微	(e)
7	不可微	不可微	不可微	(f)

6. 处处有导数 (不必有限) 的不连续函数.

设

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

则 f 在 $x=0$ 不连续. 但

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sgn} x}{x}=+\infty,$$

而当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=0$.

7. 两个在点 x_0 均可微, 而使 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 x_0 都不可微的函数 f 和 g.

设

$$f(x)=x-a,\quad g(x)\equiv 0,$$

则 f 和 g 在 $x=a$ 处均可微. 然而, 最大值函数和最小值函数

$$\max\{f,g\}=\begin{cases}x-a, & x\geqslant a,\\ 0, & x<a\end{cases}$$

和

$$\min\{f,g\}=\begin{cases}x-a, & x<a,\\ 0, & x\geqslant a\end{cases}$$

在 $x=a$ 处均不可微.

注　容易证明, 若 f,g 在 $x=a$ 处可微. 且 $f(a)\neq g(a)$, 则 $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 在 $x=a$ 处也可微. 上述反例说明了在这个陈述中, 条件 $f(a)\neq g(a)$ 是不能去掉的.

8. $[a,b]$ 上的函数 f, 它满足 Rolle 定理的三个条件中任二个条件, 但不存在 $\zeta\in(a,b)$, 使 $f'(\zeta)=0$.

(1) 设

$$f(x)=1-|x|,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

则 f 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续, 并且 $f(-1)=f(1)=0$, 即 f 满足定理的条件 (i) 和 (iii). 还有, 对 $(-1,1)$ 中除 $x=0$ 外的所有 $x, f'(x)$ 存在且有限:

$$f'(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ -1, & 0<x<1.\end{cases}$$

然而, 在 $(-1,1)$ 中就没有 ζ 能使 $f'(\zeta)=0$.

(2) 设

$$f(x)=x-[x],\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

其中 $[x]$ 代表括号函数. 易见, f 在 $(0,1)$ 内可微, 且 $f(0)=f(1)=0$, 即 f 满足定理的条件 (ii) 和 (iii). 然而, 由于 $f'(x)=1, 0<x<1$, 因此, 不存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\zeta)=0$.

(3) 设

$$f(x)=x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则 f 在 $[0,1]$ 上连续且可微, 从而 f 满足定理的条件 (i) 和 (ii). 但由于 $f'(x)\equiv 1$, 因而不存在 $\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\zeta)=0$.

注 上述例子说明, Rolle 定理的三个条件, 无论哪两个都不足以保证导函数在 (a,b) 内某点取值为零. 换句话说, 三个假设中任何一个都不能去掉.

又, Rolle 定理的条件只是充分条件, 而不是必要条件, 即如果 Rolle 定理的条件得到满足, 那么实数 ζ 一定存在; 如果定理的条件不满足, 那么 ζ 可能不存在 (参看上述反例), 也可能存在. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<1,\\ 4, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

则 f 在 $x=1$ 不连续, 从而 f 在 $[-2,2]$ 上不满足 Rolle 定理的条件. 但却存在 $\zeta=0\in(-2,2)$, 使得 $f'(\zeta)=0$, 其实对于区间 $(1,2)$ 中的任何一点 ζ 均有 $f'(\zeta)=0$.

9. 函数 f, 它在 $[a,b]$ 上有连续的导函数 f', 但对 $[a,b]$ 内某点 ζ, 不存在 x_1,x_2, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\zeta),\quad x_1<\zeta<x_2.$$

设

$$f(x)=x^3,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

则导函数 $f'(x)=3x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续. 取 $\zeta=0$, 则 $f'(\zeta)=0$, 但是不存在点 x_1 及 x_2 $(x_1<0<x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(0)=0,$$

因为否则将会有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=0,$$

然而这是不可能的.

注 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内可微, 则至少存在一点 $\zeta\in(a,b)$, 使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

上述反例表明, 给定了某点 $\zeta\in(a,b)$, 未必存在 $x_1,x_2\in[a,b]$, 使

$$f'(\zeta)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

又, 若 f 在区间 (a,b) 内二次可微, 且 $f''(\zeta)\neq 0$, 其中 $a<\zeta<b$, 则存在 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\zeta).$$

上述反例还说明了在这个陈述中 $f''(\zeta)\neq 0$ 的条件是不能去掉的.

10. 中值定理失效的可微复值函数.

在实轴上定义

$$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

此函数是处处连续和可微的, 但是不存在区间 $[a,b], a<b$, 使得在 a 与 b 之间能有某个 ζ, 满足等式

$$f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a),$$

即

$$(\cos b+i\sin b)-(\cos a+i\sin a)=(-\sin\zeta+i\cos\zeta)(b-a).$$

事实上, 假定上述等式成立, 则等式两边的模 (绝对值) 的平方亦应相等, 即

$$(\cos b-\cos a)^2+(\sin b-\sin a)^2=(b-a)^2,$$

于是, 利用基本恒等式将得出

$$\sin^2\frac{b-a}{2}=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

但这是不可能的, 因为没有一个正数 h 能够使 $\sin h=h$.

注　上述反例说明, 对于复值函数而言, 中值定理不再有效.

11. 不能用 L'Hospital 法则求极限的不定式.

设

$$f(x)=x-\sin x,\quad g(x)=x+\sin x,$$

则有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1.$$

但是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

不存在, 因而不能用 L'Hospital 法则求 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 的值.

12. L'Hospital 法则失效的复值函数的不定式.

设

$$f(x)=x,\quad g(x)=x+x^2e^{\frac{i}{x^2}},\quad 0<x<1.$$

由于对一切实数 t, 都有 $|e^{it}|=1$, 因而不难看出

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{1}$$

另一方面, 有

$$g'(x)=1+\left(2x-\frac{2i}{x}\right)e^{\frac{i}{x^2}},\quad 0<x<1,$$

所以

$$|g'(x)|\geqslant\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geqslant\frac{2}{x}-1.$$

于是得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0. \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知 L'Hospital 法则失效.

注 上述反例表明, 对复值函数不定式的定值问题, L'Hospital 法则失效.

13. 一个在某点有极值的无穷可微函数, 它的各阶导数在该点的值全都是零.

Scheeffer 给出了一个具有这种性质的函数 (参看 [71], p. 542). 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则当 $x\neq 0$ 时, $f(x)-f(0)=e^{-\frac{1}{x^2}}>0$, 因此函数 f 在点 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$.

另一方面,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=0\quad\left(其中\ y=\frac{1}{x}\right),$$

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3},$$

$$f''(x)=-\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

所以

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=0.$$

如上已得

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0,$$

故不妨设

$$f^{(n)}(0)=0,\quad n\geqslant 2,$$

则

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}.$$

显然, 当 $x\neq 0$ 时, $f^{(n)}(x)$ 为形如

$$\frac{Ce^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$$

的函数之和, 其中 C 为常数, k 为正整数. 而对任意的正整数 k, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0,$$

因此,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=0,$$

即 $f^{(n+1)}(0)=0$. 于是由归纳法得 $f^{(n)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots)$

14. 一个连续函数 f, 它在 $x=0$ 的每个邻域内有无穷多个局部极值.

设

$$f(x)=\begin{cases}|x|\left(2+\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

若 $x>0$, 则

$$f'(x)=2+\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}.$$

当 x 与 0 充分接近时, $f'(x)$ 变号无数次, 于是由函数的连续性即知, 在 $x=0$ 的附近, $f(x)$ 有无穷多个局部极值.

15. 函数 f, 使 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ 存在而 $f''(x)$ 不存在.

在闭区间 $[-1,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

经直接计算可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)+h^2\sin\left(-\dfrac{1}{h}\right)}{h^2}=0.$$

但是, 由于导函数

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处间断, 因而 $f''(0)$ 不存在.

注 容易证明, 若 $f''(x)$ 存在, 则

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

也存在且等于 $f''(x)$. 上述反例说明了这个命题的逆命题并不成立.

16. $[0,1]$ 上的一个可微函数, 其导函数在无理点连续而在有理点间断.

在闭区间 $[0,1]$ 上定义函数

$$g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

所以 $g'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处连续而在 $x = 0$ 处间断.

设 $\{r_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(x - r_n).$$

显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'(x - r_n)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 因而

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'(x - r_n), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

于是, f' 在 $[0,1]$ 中的任一无理点连续而在任一有理点间断.

17. 导数几乎处处为零的单调的连续函数.

设 C 是 Cantor 集. 我们把 C 的邻接区间分组排列如下: 第一组是一个区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 第二组是两个区间 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, 第三组是四个区间 $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$, 依此类推, 在第 n 组中有 2^{n-1} 个长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间.

今做函数 g 如下:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right),\\ \dfrac{1}{4}, & x\in\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{2}{9}\right),\\ \dfrac{3}{4}, & x\in\left(\dfrac{7}{9},\dfrac{8}{9}\right),\\ \cdots\cdots.\end{cases}$$

在第三组的四个区间中, g 依次取值 $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$. 一般地, 在第 n 组的 2^{n-1} 个区间中, g 依次取值 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$. 这样, g 在开集 $[0,1]\backslash C=G$ 上有定义, 它在 G 的每个构成区间上为常数, 且限制在 G 上为一递增函数. 将 g 扩充定义到整个区间 $[0,1]$ 上:

$$g(x)=\sup_{\substack{t<x\\ t\in G}}g(t),\quad g(0)=0,\quad g(1)=1.$$

这样, g 是整个区间 $[0,1]$ 上的一个递增函数.

不难证明, g 是一个连续函数. 事实上, 因为 g 在 G 上所取的函数值在 $[0,1]$ 中稠密, 所以如果 g 在某点 x_0 不连续, 那么开区间 $(g(x_0-0),g(x_0))$ 或 $(g(x_0),g(x_0+0))$ 中的一切数就将不是 g 的函数值, 这与 g 的函数值在 $[0,1]$ 中稠密的事实相违背. 因此, g 是一个递增的连续函数, 并且 g' 几乎处处等于 0 (在 G 中的每一点 x, 当然有 $g'(x)=0$).

上面定义的函数 g 称为 Cantor 函数.

18. 导数几乎处处为零的严格单调的连续函数.

设 g 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数, 令 $g(x)=0(x<0),g(x)=1\ (x>1)$. 于是, g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的非减的连续函数, 且 $g'(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处成立. 设

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

是实数轴上的任一可数稠密子集, 并令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g[2^n(x-a_n)].$$

兹证, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续、严格递增且导数几乎处处为零.

事实上, 定义函数 f 的级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致收敛的, 因此, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 若 $x_2<x_1$, 取 a_n 使 $x_2<a_n<x_1$, 则

$$g[2^n(x_1-a_n)]>0=g[2^n(x_2-a_n)],$$

且当 $m\neq n$ 时, 有

$$g[2^m(x_1-a_m)]\geqslant g[2^m(x_2-a_m)].$$

因此, $f(x_1) > f(x_2)$. 即 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格递增的, 最后, 据 Fubini 定理, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g'[2^n(x-a_n)]=0.$$

这个例子是由 Gerald[44] 做出的.

19. 函数 f 和 g 具有相同的导数, 而 f 和 g 并不相差一个常数.

我们知道, 如果 f 和 g 具有相同的有限导数, 那么 f 和 g 相差一个常数. 在这个命题里, 导函数有限这一条件是非常重要的, 如果去掉有限这一条件, 上述命题不再成立. Rey Pastor[68] 有例如下:

设 g 是 Cantor 函数. 于单位闭区间 $[0,1]$ 上定义函数 h, 使在 Cantor 集 C 上它的值等于零; 而在构造 Cantor 集 C 时移走的各个开区间 (a,b) 内, $h(x)$ 的图形由两个直径都在 x 轴上的全等的半圆组成, 对应左半 (a,b) 的半圆位于 x 轴之上, 而对应右半 (a,b) 的半圆位于 x 轴之下:

$$h(x)=\begin{cases}\left[\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2-\left(x-\dfrac{3a+b}{4}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, & a<x\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ -\left[\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2-\left(x-\dfrac{3b+a}{4}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, & \dfrac{a+b}{2}\leqslant x<b.\end{cases}$$

于是 h 在区间 $[0,1]$ 上处处连续. 最后, 设

$$f(x)=2g(x)+h(x),$$
$$q(x)=g(x)+h(x).$$

那么在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上 $f'(x)=q'(x)$: 对于 Cantor 集 C 的每个 x 来说, $f'(x)=q'(x)=+\infty$; 若 x 是构造 C 时所移走的一个区间的中点, 则有 $f'(x)=q'(x)=-\infty$; 在其他的点 $x\in[0,1]\backslash C, f'(x)=q'(x)=h'(x)$. 另一方面, $f(x)-q(x)=g(x)$, 而 $g(x)$ 不是常值函数.

20. 一个严格递增的连续函数, 它不处处可微.

下面的例子是由 Pringsheim 做出的 (参看 [66]).

令

$$f(x)=\begin{cases}x\left\{1+\dfrac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right\}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易见, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 因为当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=1+\frac{1}{3}\sin(\ln x^2)+\frac{2}{3}\cos(\ln x^2)>0,$$

所以 f 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是严格递增的. 又当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 而当 $x<0$ 时, $f(x)<0$, 可见 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也是严格递增的. 但由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\left\{1+\frac{1}{3}\sin(\ln x^2)\right\}$$

不存在, 因而 f 在 $x=0$ 处不可微.

注 有如下的 Lebesgue 定理: 区间 (a,b) 上的单调函数是几乎处处可微的. 有人或许会猜测, 严格单调函数的不可微的点都是一些间断点. 上述反例说明了这种猜测是不正确的.

21. 一个单调函数, 其导函数并不单调.

设

$$f(x)=2x+\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

则

$$f'(x)=2+\cos x>0,$$

所以函数 f 在区间 $[0,2\pi]$ 上是递增的. 又因 $f''(x)=-\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的符号不定, 故 f' 在 $[0,2\pi]$ 上不是单调的.

22. $(-\infty,+\infty)$ 上的一个严格单调的有界可微函数, 使 $\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq0$.

对非负整数 n, 令

$$f(n)=1-2^{-n}.$$

然后按下列方式把 f 的定义域扩张到全体非负实数上: 对每一非负整数 n, 在区间 $[n,n+1]$ 上, 函数 f 与 f_n 相一致. 这里, f_n 是 $[n,n+1]$ 上的任一单调可微函数, 适合

$$f_n(n)=f(n),\quad f_n(n+1)=f(n+1),\quad f_n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{f(n)+f(n+1)}{2},$$

$$f_n'(n)=f_n'(n+1)=0,\quad f_n'\left(n+\frac{1}{2}\right)=1.$$

例如, 在每个区间 $[n,n+1]$ 上, 可以适当选择两个椭圆的弧段作为函数 f_n 的图像, 可使 f_n 满足上述提到的全部条件.

其次, 令 $f(-x)=-f(x)$, 则 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界可微函数. 显然, f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调, 且 $\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq0$. 其实, 这个极限根本不存在, 因为 f' 在每个闭单位区间上, 恒能达到 0 和 1.

上面的构造法属于 Moran[58].

注 如果 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调有界的可微函数, 那么, 从 f 的图形上看似乎应该有

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=0.$$

上述反例说明了这种仅凭直觉的判断是不正确的.

23. 一个在某点有局部极值的可微函数, 它在该点的左右两侧都不是单调的.

设

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

则当 $x\neq 0$ 时,

$$f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0.$$

因此, f 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=2$.

当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+\cos\frac{1}{x}.$$

易见, 上式右端的第一项当 x 趋于零时它趋于零, 而 $\cos\frac{1}{x}$ 振荡于 -1 与 $+1$ 之间. 因此, f' 在 $x=0$ 的附近变号无数次, 从而 f 在 $x=0$ 的左右两侧都不可能是单调的.

24. 一个可微函数 f, 使 $f'(x_0)>0$, 但 f 在点 x_0 的任何邻域内都不是单调的.

设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它在 $x=0$ 处的导数为

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}>0.$$

但是, f 在任一包含点 $x=0$ 的开区间上都不是单调的. 实际上, 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x}.$$

当 $x_k=\frac{1}{k\pi}$ $(k=1,2,\cdots)$ 时,

$$f'(x_k)=\frac{1}{2}-(-1)^k,$$

从这个式子可以看出, 在包含零点的任何开区间内, 导数可以取不同符号的值, 因此, f 在这个开区间内不是单调的.

25. 一个可微函数 f, 当 x 为有理数时, $f(x)$ 是有理数, 而 $f'(x)$ 是无理数.

设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n!x)}{(n!)^2},\tag{1}$$

其中 $g(y)=y(1-4y^2)$ 是定义在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上并以 1 为周期而扩张到整个 R^1 上的周期函数. 由于 $g(0)=0$, 而 g 是以 1 为周期的函数, 故函数 g 在所有整数点处的值为 0,

且有导数为 1. 此外, 对任何有理数 x, 级数 (1) 至多有有限个非零的有理项, 从而 $f(x)$ 是有理数.

显然, 级数 (1) 的导函数级数一致且绝对收敛, 从而收敛于 f 的导函数. 对任何有理数 x, 级数 (1) 的导数值等于 e 的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

顶多除去有限个有理项. 因此, 对有理数 x, f 的导数是 e 加上某个有理数, 而 e 是无理数, 故 $f'(x)$ 是无理数.

这个例子是由 Knight[53] 做出的.

26. 在已知点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不可微的连续函数.

函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$ 具有所需的性质.

27. 在无理点可微而在有理点不可微的连续函数.

设 $r_k\ (k=1,2,\cdots)$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k},$$

则对每一 k, 函数 $f_k(x)=\frac{|x-r_k|}{3^k}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $|f_k(x)|\leqslant\frac{1}{3^k}$. 因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 从而其和函数 f 在 $[0,1]$ 上也连续.

现证 f 在任一无理点 $x_0\in[0,1]$ 可微, 而在任一有理点 $r_k\in[0,1]$ 不可微.

事实上, 若 $x_0\in[0,1]$ 是无理点, 则 $x_0-r_k\neq 0\ (k=1,2,\cdots)$. 由于函数 $|x|$ 在 $x\neq 0$ 处可微, 因而当 x_0 为无理点时,

$$f_k'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_k(x_0+x)-f_k(x_0)}{x}$$

存在, 且由下式

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_k(x_0+x)-f_k(x_0)}{x}\right|&=\frac{1}{3^k}\left|\frac{|x_0+x-r_k|-|x_0-r_k|}{x}\right|\\&\leqslant\frac{1}{3^k}\cdot\frac{|x_0+x-r_k-(x_0-r_k)|}{|x|}=\frac{1}{3^k},\end{aligned}$$

得到

$$|f_k'(x_0)|\leqslant\frac{1}{3^k},$$

从而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x_0)$ 收敛. 令

$$|g_k(x)|=\left|\frac{f_k(x_0+x)-f_k(x_0)}{x}\right|,$$

则由于对任一 x, 恒有 $|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3^k}$, 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 在任何区间上一致收敛. 于是

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x_0), \end{aligned}$$

这就证明了 f 在 x_0 处可微.

若 $x_0 \in [0,1]$ 是有理点, $x_0 = r_{k_0}$, 则当 $k > k_0$ 时, $x_0 \neq r_k$, 于是仿照前面的证明可知, 函数

$$h(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{|x-r_k|}{3^k}$$

在 x_0 处可微. 而

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}|x-r_1| + \frac{1}{3^2}|x-r_2| + \cdots + \frac{1}{3^{k_0-1}}|x-r_{k_0-1}| + \frac{1}{3^{k_0}}|x-r_{k_0}| + h(x) \\ &= f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{k_0-1}(x) + f_{k_0(x)} + h(x), \end{aligned}$$

又 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{k_0-1}(x)$ 在 $x_0 = r_{k_0}$ 处可微, $h(x)$ 在 $x_0 = r_{k_0}$ 处也可微, $f_{k_0}(x)$ 在 $x_0 = r_{k_0}$ 处不可微, 于是推知 f 在 $x_0 = r_{k_0}$ 处不可微.

28. 存在函数 f, 它在无穷多个点 x 处连续且在这些点处有 $f'(x) = 1$, 而 $|f|$ 也仅在这些点处连续但均不可微.

下面的构造法属于 Andresen[24].

在开区间 $(0,1)$ 内定义函数 h 如下:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ \sin x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

则 h 仅在 $x=0$ 处连续且可微, 显然, $h'(0) = 1$. 又, $|h|$ 也仅在 $x=0$ 处连续, 但它在该点不可微.

今定义函数 f :

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{3}{2^k}, & x \text{ 为有理数}, \\ \sin\left(x - \dfrac{3}{2^k}\right), & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

这里, $x \in \left[\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{1}{2^{k-2}}\right), k = 2, 3, \cdots$. 于是, f 在点 x 连续当且仅当 $x = \frac{3}{2^k}$, 且在这些点处恒有 $f'(x) = 1$. 又, $|f|$ 在这些点且仅在这些点处连续. 但与 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可微一样, $|f|$ 在这些点处均不可微.

29. 处处连续而无处可微的函数.

第一个无处可微的连续函数的例子是由 Weierstrass 给出的:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

此处 $0<b<1, a$ 为一正奇数. 此级数在任何区间上都一致收敛, 所以 f 处处连续. 另一方面, 若 $ab>1$, 则由逐项微分得到的级数发散. 这个事实本身并没有证明 f 不可微, 但却提供了这方面的可能性. 我们将要证明: 若 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, 则在任何点 x 处, 函数 f 都没有有限的导数.

首先, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\cos\{a^n\pi(x+h)\}-\cos(a^n\pi x)}{h}\\&=\sum_{n=0}^{m-1}+\sum_{n=m}^{\infty}=S_m+R_m.\end{aligned}$$

因为

$$|\cos\{a^n\pi(x+h)\}-\cos(a^n\pi x)|=|a^n\pi h\sin\{a^n\pi(x+\theta h)\}|\leqslant a^n\pi|h|,$$

其中 $0<\theta<1$. 所以

$$|S_m|\leqslant\sum_{n=0}^{m-1}\pi a^n b^n=\pi\frac{a^m b^m-1}{ab-1}<\pi\frac{a^m b^m}{ab-1}.$$

其次, 我们给 h 以特定的数值, 而为 R_m 求一下限. 为此, 记

$$a^m x=\alpha_m+\zeta_m,$$

此处 α_m 为一整数, 而 $-\frac{1}{2}\leqslant\zeta_m<\frac{1}{2}$. 命

$$h=\frac{1-\zeta_m}{a^m},$$

则有

$$0<h\leqslant\frac{3}{2a^m}$$

及

$$a^n\pi(x+h)=a^{n-m}a^m\pi(x+h)=a^{n-m}\pi(\alpha_m+1).$$

因为 a 是奇数, 所以

$$\cos\{a^n\pi(x+h)\}=\cos\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+1)\}=(-1)^{\alpha_m+1}.$$

又因

$$\begin{aligned}\cos(a^n\pi x) &= \cos\{a^{n-m}\pi(\alpha_m+\zeta_m)\}\\ &= \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)\cos(a^{n-m}\pi\zeta_m)\\ &= (-1)^{\alpha_m}\cos(a^{n-m}\pi\zeta_m),\end{aligned}$$

所以

$$R_m = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_{n=m}^{\infty} b^n\{1+\cos(a^{n-m}\pi\zeta_m)\}.$$

由于上式右端的级数的每一项都是正的, 故若只取第一项, 便得

$$|R_m| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}a^m b^m.$$

于是

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geqslant |R_m|-|S_m| > \left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right)a^m b^m.$$

若 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, 则括号内的因子取正值; 故当 $m\to\infty, h\to 0$ 时, 不等式的右方趋向无穷. 所以 f 在点 x 处不可微. 由于 x 是任取的, 因而 f 无处可微.

注 柳孟辉 [15] 只用了函数、连续性与可微性等几个必要的概念而构造了一个无处可微的连续函数.

Faber[41] 做出了一个无处存在单侧导数 (有限或无穷) 的连续函数.

30. 处处连续而仅在一点可微的函数.

设 g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的无处可微的连续函数. 令 $f(x)=xg(x)$, 则 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 由于

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hg(h)}{h}=\lim_{h\to 0}g(h)=g(0),$$

因而 f 在 $x=0$ 处可微且 $f'(0)=g(0)$. 当 $x\neq 0$ 时,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=x\frac{g(y)-g(x)}{y-x}+g(y),$$

而 $\lim_{y\to x}g(y)=g(x), g'(x)$ 不存在, 故由上面的等式可知, $f'(x)$ 不存在. 因此, f 仅在 $x=0$ 处可微.

第四章　积　　分

基本概念和主要结果

设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 对于 $[a,b]$ 上任意取定的分划 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和任意取定 $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 做和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 设 $\lambda(\Delta)$ 为 Δx_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中的最大数, 即

$$\lambda(\Delta) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i.$$

若当 $\lambda(\Delta) \to 0$ 时, 和数的极限存在, 且此极限值不依赖于 ζ_i 的选择, 也不依赖于对 $[a,b]$ 的分划, 就称此极限值为 f 在 $[a,b]$ 上的**定积分**, 记作

$$\int_a^b f(x)dx.$$

因为在历史上是 Riemann 首先在一般形式下给出这一定义, 所以在上述意义下的定积分也叫作 Riemann **积分**, 简称 **(R) 积分**或**积分**.

如果 f 在 $[a,b]$ 上的定积分存在, 我们就说 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann **可积**, 简称 **(R) 可积**或**可积**.

可以证明, $[a,b]$ 上的连续函数及单调有界函数在 $[a,b]$ 上都可积.

应当注意, 单调函数可以有间断点, 但它的间断点的数目是有限个或者可数个 (参看 [4]). 于是产生了这样的问题: 为了使有界函数仍然在 Riemann 意义下可积, 它可以有多少间断点呢? Lebesgue 给出了这个问题的完整答案:

Lebesgue 定理　f 在闭区间 $[a,b]$ 上可积的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上有界并且几乎处处连续, 即除了一个测度为零的集合外, f 在 $[a,b]$ 上到处连续.

设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数, 对于 $[a,b]$ 的任意分划 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots <$

$x_n = b$, 用 m_i, M_i 表示 f 在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的下确界与上确界, 做和数

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad \text{和} \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

二者分别称为与分划 Δ 相关的 **Darboux 小 (大) 和数.**

基本定理 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在分划 Δ, 使与之相应的大小和数之差

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon.$$

定积分基本性质:

1. 对任何常数 c 皆有 $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

2. 若 f 与 g 皆在 $[a,b]$ 上可积, 则对任意常数 $\alpha, \beta, \alpha f + \beta g$, f 与 g 皆在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

3. 若 $a < c < b$, f 在 $[a,c], [c,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

反之, 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上同时可积, 并成立上面的等式.

4. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx.$$

5. 若 f 与 g 皆在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \leqslant g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b g(x) dx.$$

6. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且

$$G'(x) = f(x).$$

微积分学基本定理 (Newton-Leibniz 公式) 设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 若 F 是 f 的一个原函数, 即 $F' = f$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

分部积分法则 若函数 f 和 g 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续导数 f' 和 g', 则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

变量替换公式 若 $f(u)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, $u=\varphi(x)$ 适合下述条件:

(i) $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数;

(ii) 当 x 在 $[a,b]$ 上变化时, 函数值 $\varphi(x)$ 不超出 $[\alpha,\beta]$, 则

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

积分第一中值定理 若函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 g 在 $[a,b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx,$$

其中 $m\leqslant\mu\leqslant M, M=\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x), m=\inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 特别地, 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则有 $\zeta\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx.$$

积分第二中值定理 若 g 在 $[a,b]$ 上可积, f 在 $[a,b]$ 上单调, 则有 $\zeta\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\zeta g(x)dx + f(b)\int_\zeta^b g(x)dx.$$

若 g 在 $[a,b]$ 上可积, f 递减且非负, 则有 $\zeta\in[a,b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\zeta g(x)dx.$$

若 g 在 $[a,b]$ 上可积, f 递增且非负, 则有 $\zeta\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\zeta^b g(x)dx.$$

若函数 f 于每一有界区间 $[a,b]$ 上可积, 则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

若函数 f 于点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $[a,b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 上是可积的, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{2}$$

若极限 (1) ((2)) 存在且有限, 则对应的积分称为**收敛**的, 或称 f 在 $[a,+\infty)$ ($[a,b]$) 上是**广义可积**的. 在相反的情形, 则称对应的积分为**发散**的, 或称 f 在 $[a,+\infty)$ ($[a,b]$) 上**不是广义可积**的.

若 $|f|$ 是广义可积的, 则称函数 f 的对应积分 (1) ((2)) 为**绝对收敛** (或**绝对可积**) 的. 收敛而不绝对收敛的广义积分称为**条件收敛**的.

当所论广义积分收敛时, 相应的 Newton-Leibniz 公式、变量替换公式和分部积分公式均成立.

Cauchy 准则 $\int_a^b f(x)dx$ (b 可取 ∞, 下同) 收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 δ ($a<\delta<b$), 使当 $\delta<b'<b''<b$ 时,

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

比较判别法 若 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, 则

$\int_a^b g(x)dx$ 收敛蕴涵 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛;

$\int_a^b f(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b g(x)dx$ 发散.

若 $|f(x)|\leqslant F(x)$, 则

$$\int_a^b F(x)dx \text{ 收敛 } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ 绝对收敛.}$$

Dirichlet 判别法 如果

(i) g 单调且 $\lim_{x\to b} g(x)=0$,

(ii) $\left|\int_a^u f(x)dx\right|\leqslant M, u\in[a,b)$,

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

Abel 判别法 如果

(i) $\int_a^b f(x)dx$ 收敛,

(ii) g 单调有界,

则 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛.

无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

之值是当 A, A' 独立地趋于 $+\infty$ 时, $\int_{-A'}^{A} f(x)dx$ 的极限值. 有时对于某些函数 f, 这样的极限并不存在, 但是当 $A=A'$ 并令 $A\to+\infty$ 时, $\int_{-A}^{A} f(x)dx$ 的极限存在, 称这极限为 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上积分的 **Cauchy 主值**, 记为

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

同样, 对于 f 在 $[a,b]$ 上无界, 而 c 是唯一**奇点** (即 f 在点 c 的邻近无界) 的情形, 定义

$$\text{V. P.}\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

在这一章的某些问题和反例中, 还要涉及无穷级数的收敛和一致收敛等基本概念.

问　　题

1. 计算积分 $\int_{e^{-2n\pi}}^1 |(\cos(\ln\frac{1}{x}))'|dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\right|dx&=\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|(\cos((\ln x)))'\right|dx\\&=\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\frac{d\cos(\ln x)}{d\ln x}\right|\left|\frac{d\ln x}{dx}\right|dx\\&=\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\frac{d\cos(\ln x)}{d\ln x}\right|d\ln x=\int_{-2n\pi}^0\left|\frac{d\cos t}{dt}\right|dt\\&=\int_0^{2n\pi}|\sin t|\,dt=2n\int_0^\pi\sin t dt=4n.\end{aligned}$$

2. 求 $\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}dx$, 其中 E 为闭区间 $[0,4\pi]$ 中使被积式有意义的一切值所成之集.

解

$$\begin{aligned}\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}dx&=\int_0^\pi|\cos x|\sqrt{\sin x}dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}dx\\&\quad+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}dx+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}dx\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}dx=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

3. 证明

$$\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx.$$

证　当 $a=b=0$ 时, 上式两边都等于 $2\pi f(0)$, 故只考虑 $\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$ 的情形. 引入辅助角 α 使

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha).$$

事实上, α 可由下列两式确定 $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$:

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha))dx \\ &= \int_\alpha^{2\pi+\alpha} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin t)dt = \int_\alpha^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha},\end{aligned}$$

这里略去了被积式 $f(\sqrt{a^2+b^2}\sin t)dt$ (以下同). 做代换 $u = t - 2\pi$, 则可得 $\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} = \int_0^\alpha$, 故

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx = \int_\alpha^{2\pi} + \int_0^\alpha &= \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\sin t\right)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}.\end{aligned}$$

做代换 $u = t - 2\pi$, 可得 $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$. 做代换 $u = \pi - t$, 可得 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\int_{\pi-\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{3\pi}{2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$. 因此

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx.$$

4. 计算 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx$.

解 令 $\arctan x = \frac{\pi}{4} - \arctan t$, 则

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan t\right) = \frac{1-t}{1+t}, \quad dx = \frac{-2}{(1+t)^2}dt.$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx &= \int_0^1 \frac{\dfrac{\pi}{4} - \arctan t}{1+t}dt \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t}dt,\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

5. 设 a_1, b_1 为任意取定的实数, 定义

$$a_n = \int_0^1 \max\{b_{n-1}, x\}dx \quad (n = 2, 3, \cdots), \tag{1}$$

$$b_n = \int_0^1 \min\{a_{n-1}, x\}dx \quad (n = 2, 3, \cdots). \tag{2}$$

证明: $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都收敛, 并求出它们的极限 ([22], 1957, p. 435–436).

证　由 (1), (2) 得

$$a_n \geqslant \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad b_n \leqslant \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots). \tag{3}$$

代入 (1), (2) 中, 便可估计出:

$$\begin{cases} a_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx = \frac{5}{8} \quad (n = 2, 3, \cdots), \\ b_{n+1} \geqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} dx = \frac{3}{8} \quad (n = 2, 3, \cdots). \end{cases} \tag{4}$$

结合 (3), (4) 便知

$$\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{8} \leqslant b_n \leqslant \frac{1}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots). \tag{5}$$

代入 (1), (2) 中, 可得 a_n, b_n 的递推公式:

$$2a_{n+1} = 2\left(\int_0^{b_n} b_n dx + \int_{b_n}^1 x dx\right) = 1 + b_n^2, \tag{6}$$

$$2b_{n+1} = 2\left(\int_0^{a_n} x dx + \int_{a_n}^1 a_n dx\right) = 2a_n - a_n^2 \quad (n = 2, 3, \cdots). \tag{7}$$

由 (6), (7) 可得如下关系式:

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{b_{n+1} + b_n}{2}(b_{n+1} - b_n) \quad (n = 2, 3, \cdots), \\ b_{n+1} - b_n = \dfrac{2 - (a_n + a_{n-1})}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

由此得

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{b_{n+1} + b_n}{2} \cdot \frac{2 - (a_n + a_{n-1})}{2}(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

再由 (5) 可估计出

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}| \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

反复利用这个估计式, 可得

$$|a_{2m+2} - a_{2m+1}| \leqslant \frac{1}{4^m}|a_2 - a_1| \quad (m = 1, 2, \cdots),$$
$$|a_{2m+3} - a_{2m+2}| \leqslant \frac{1}{4^m}|a_3 - a_2| \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

令 $m \to \infty$, 便得 $a_{2m+2} - a_{2m+1} \to 0, a_{2m+3} - a_{2m+2} \to 0$, 从而可推知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在. 同理推知 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在. 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

由 (6), (7) 得

$$\begin{cases} 2a = 1 + b^2, \\ 2b = 2a - a^2. \end{cases}$$

因此, $a = 2 - \sqrt{2}, b = \sqrt{2} - 1$.

6. 设 $x_0 = 25, x_n = \arctan x_{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证 设 $f(x) = \arctan x$. 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)} < 1$. 因此,

$$\int_0^x f'(t)dt < \int_0^x dt,$$

即 $f(x) < x$. 故数列 $\{x_n\}$ 单调递减. 又, 对每一 $n, x_n > 0$, 故 $\{x_n\}$ 收敛. 令 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 在 $x_{n+1} = \arctan x_n$ 的两端取极限, 便得 $a = \arctan a$. 因此 $a = 0$.

7. 设 $T_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{t}{n} + \sin\frac{2t}{n} + \cdots + \sin\frac{n-1}{n}t\right)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1-\cos t}{t}.$$

证 把 $[0, t]$ 分为 n 等分, 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{kt}{n} = \int_0^t \sin x dx = 1 - \cos t.$$

又因

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin t}{n} = 0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{kt}{n} = \frac{1-\cos t}{t}.$$

8. 设

$$P_n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{4}{e}.$$

证 $\lim_{n\to\infty}\ln P_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right\}$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx=\ln\left(\frac{4}{e}\right),$$

故 $\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{4}{e}$.

9. 设 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 证明: f 在 $[a,b]$ 上可积.

证 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$f_n(x)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f_n(x)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

任取 $[a,b]$ 的分划 T :

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b,$$

有

$$m_i(f_n)-\frac{\varepsilon}{2}<m_i(f)\leqslant M_i(f)<M_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $m_i(f_n)$ 与 $M_i(f_n)$ 分别代表 f_n 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的下确界与上确界. 故

$$\begin{aligned}S_T-s_T&=\sum_{i=1}^m\{M_i(f)-m_i(f)\}\Delta x_i\\&\leqslant\sum_{i=1}^m\{M_i(f_n)-m_i(f_n)\}\Delta x_i+\varepsilon\sum_{i=1}^m\Delta x_i\\&<\varepsilon+\varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

从而 f 在 $[a,b]$ 上可积.

10. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 并且

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

证明存在区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 使 $f(x)>0,x\in[\alpha,\beta]$.

证 (反证法) 若不然, 则对于 $[a,b]$ 的任何子区间 $[\alpha,\beta]$ 都有点 ζ, 使 $f(\zeta)\leqslant 0$, 从而对于 $[a,b]$ 的任何分划 T :

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都可找到一点 ζ_i, 使 $f(\zeta_i)\leqslant 0$. 再由 f 在 $[a,b]$ 上的可积性, 知

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta x_i\leqslant 0,$$

此与题设矛盾.

11. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续且恒大于零. 证明

$$\ln\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 \ln f(x)dx.$$

证 把区间 $[0,1]$ 等分成 n 个小区间, 在第 i 个小区间上任取一点 ζ_i $(i=1,2,\cdots,n)$, 由几何平均值不超过算术平均值公式, 得到

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(\zeta_i)}.$$

两边取自然对数:

$$\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)}{n}\right) \geqslant \ln\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} f(\zeta_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\zeta_i).$$

两端取极限, 据定积分的定义得到

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)}{n}\right) \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\zeta_i),$$

即

$$\ln\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 \ln f(x)dx.$$

12. 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $A\leqslant f(x)\leqslant B$. 证明函数 $\varphi[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证 任给 $\varepsilon>0$, 据函数 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上的一致连续性, 存在 $\eta>0$, 使得在 $[A,B]$ 中长度小于 η 的任一闭区间上, 函数 $\varphi(x)$ 的振幅都小于 $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. 用 Ω 表 $\varphi(x)$ 在 $[A,B]$ 上的振幅. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积性, 知必有 $\delta>0$ 存在, 使对 $[a,b]$ 的任一分划, 只要 $\max\Delta x_i<\delta$, 就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i < \eta\frac{\varepsilon}{2\Omega},$$

其中 $\omega_i(f)$ 表 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅.

下证对 $[a,b]$ 的任一分划, 只要 $\max\Delta x_i<\delta$, 就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i[\varphi(f)]\Delta x_i < \varepsilon.$$

事实上, 将诸区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 分成两组, 第一组是满足 $\omega_i(f) < \eta$ 的 (其下标以 "i'" 记之), 第二组是满足 $\omega_i(f) \geqslant \eta$ 的 (下标以 "i''" 记之). 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i[\varphi(f)]\Delta x_i &= \sum_{i'}\omega_{i'}[\varphi(f)]\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}[\varphi(f)]\Delta x_{i''}\\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_{i'} + \Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''},\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega} &> \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i\\ &= \sum_{i'}\omega_{i'}(f)\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}\\ &\geqslant \sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''} > \eta\sum_{i''}\Delta x_{i''},\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i[\varphi(f)]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \Omega\frac{\varepsilon}{2\Omega} = \varepsilon.$$

由此可知, $\varphi[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上可积.

13. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = 0.$$

证　对任给 $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 0.$$

于是存在 n_0, 当 $n > n_0$ 时, 有 $\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \varepsilon$. 因而当 $n > n_0$ 时,

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}dx\\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\varepsilon dx + \varepsilon \leqslant \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = 0.$$

14. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证明 f 的连续点在 $[a,b]$ 中是稠密的, 即对于任意区间 $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$, 总存在一点 $x_0 \in (\alpha,\beta)$, 使 f 在 x_0 连续.

证 首先指出, 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的子区间 $[a',b']$, 使得振幅

$$\omega(a',b')=\sup_{x\in[a',b']}f(x)-\inf_{x\in[a',b']}f(x)<\varepsilon.$$

事实上, 如果上述结论不真, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使对于 $[a,b]$ 的任意分划, 有

$$\sum_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_i\Delta x_i=\varepsilon_0(b-a)>0,$$

这与 f 在 $[a,b]$ 上可积发生矛盾, 因此, 结论为真.

令 $[a_1,b_1]$ 为区间 $[a,b]$. 因 f 在 $\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]$ 上可积, 故存在区间 $[a_2,b_2]\subset\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]\subset[a_1,b_1]$, 使

$$\omega(a_2,b_2)<\frac{1}{2}.$$

同样, 存在区间 $[a_3,b_3]\subset\left[a_2+\frac{b_2-a_2}{4},b_2-\frac{b_2-a_2}{4}\right]\subset[a_2,b_2]$, 使

$$\omega(a_3,b_3)<\frac{1}{3}.$$

这样继续下去, 得一串区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$, 满足

$$a=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1=b,$$

并且 $b_n-a_n\leqslant\frac{b-a}{2^{n-1}}\to0\ (n\to\infty),\omega(a_n,b_n)<\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$. 由区间套定理, 存在唯一 $c\in(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$. 下面证明 f 在 c 点连续.

任给 $\varepsilon>0$, 取正整数 n_0 使 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$. 再取 $\delta>0$ 使 $(c-\delta,c+\delta)\subset[a_{n_0},b_{n_0}]$. 于是, 当 $|x-c|<\delta$ 时, 必有

$$|f(x)-f(c)|\leqslant\omega(a_{n_0},b_{n_0})<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

故 f 在点 $x=c$ 连续.

15. 设 f 与 g 在 $[a,b]$ 上可积. 证明 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leqslant\left\{\int_a^b[f(x)]^2dx\right\}\left\{\int_a^b[g(x)]^2dx\right\}.$$

证 对任何实数 t, 有

$$\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2dx\geqslant0,$$

即

$$t^2\int_a^b[f(x)]^2dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b[g(x)]^2dx\geqslant0.$$

这是关于变量 t 的不等式, 左端是二次三项式, 于是其判别式

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2-\int_a^b[f(x)]^2dx\int_a^b[g(x)]^2dx\leqslant 0,$$

即

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leqslant\left\{\int_a^b[f(x)]^2dx\right\}\left\{\int_a^b[g(x)]^2dx\right\}.$$

16. 设函数 f 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且

$$\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta d\theta=\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta=0.$$

证明存在 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, 使得 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

证　不妨设 $f(x)\not\equiv 0$. 因

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta=0\quad 且\quad \sin\theta>0\quad(0<\theta<\pi),$$

故 f 在 $[0,\pi]$ 内必定变号. 由 f 的连续性可知, 至少存在一点 $\alpha\in(0,\pi)$, 使得 $f(\alpha)=0$.

假设 α 是 f 在 $(0,\pi)$ 内的唯一零点, 则 f 在 $(0,\alpha)$ 与 (α,π) 内异号, 于是

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin(\theta-\alpha)d\theta\neq 0.$$

另一方面, 又有

$$\int_0^\pi f(\theta)\sin(\theta-\alpha)d\theta=\cos\alpha\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta d\theta-\sin\alpha\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta d\theta=0,$$

矛盾. 因此, 至少存在两点 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ 使得 $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

17. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证明对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 p 和 q, 使对一切 $x\in[a,b]$ 恒有

$$p(x)\leqslant f(x)\leqslant q(x),$$

且

$$\int_a^b[q(x)-p(x)]dx<\varepsilon.$$

证　因 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在分划 T, 使

$$S_T-s_T=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, M_i = \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), m_i = \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$. 定义阶梯函数 p, q 如下:

$$p(x) = \begin{cases} m_i, & x_{i-1} \leqslant x < x_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1), \\ m_n, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n, \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} M_i, & x_{i-1} \leqslant x < x_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1), \\ M_n, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n. \end{cases}$$

显然, $p(x) \leqslant f(x) \leqslant q(x)$, 且

$$\begin{aligned} \int_a^b [q(x)-p(x)]dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [q(x)-p(x)]dx \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon. \end{aligned}$$

18. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证明对任给 $\varepsilon > 0$, 存在两个多项式 p 和 q, 使对一切 $x \in [a,b]$ 恒有

$$p(x) \leqslant f(x) \leqslant q(x),$$

且

$$\int_a^b [q(x)-p(x)]dx < \varepsilon.$$

证 由本章问题 17 可知, 只要证明此命题对阶梯函数成立即可. 不妨设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha,\beta], \\ 0, & x \in [a,b]\backslash[\alpha,\beta]. \end{cases}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取充分小的正数 $\eta < \frac{\varepsilon}{4(b-a+1)}$, 做函数

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 1+\eta, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ \eta, & a \leqslant x \leqslant \alpha-\eta \text{ 或 } \beta+\eta \leqslant x \leqslant b, \\ \text{线性}, & \alpha-\eta \leqslant x \leqslant \alpha \text{ 或 } \beta \leqslant x \leqslant \beta+\eta. \end{cases}$$

则有

$$f_\eta(x) - f(x) \geqslant \eta, \quad x \in [a,b],$$

且

$$\begin{aligned} 0 &< \int_a^b [f_\eta(x) - f(x)]dx = \eta(\alpha-\eta-a) + \eta(b-\beta-\eta) + \eta(1+2\eta) + \eta(\beta-\alpha) \\ &= \eta(b-a+1) < \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

因 f_η 连续, 故据 Weierstrass 逼近定理 (参看第六章问题 22), 存在多项式 $q(x)$, 使对一切 $x\in[a,b]$ 恒有

$$|f_\eta(x)-q(x)|\leqslant\eta,$$

从而 $f(x)\leqslant f_\eta(x)-\eta\leqslant q(x)$. 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b[q(x)-f(x)]dx&\leqslant\int_a^b|q(x)-f_\eta(x)|dx+\int_a^b|f_\eta(x)-f(x)|dx\\&\leqslant\eta(b-a)+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

同理可证存在多项式 $p(x)$, 使对一切 $x\in[a,b]$ 恒有

$$p(x)\leqslant f(x)$$

且

$$\int_a^b[f(x)-p(x)]dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b[q(x)-p(x)]dx&\leqslant\int_a^b[q(x)-f(x)]dx+\int_a^b[f(x)-p(x)]dx\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

19. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证明等式

$$\int_a^b f^2(x)dx=0,$$

当且仅当对属于 $[a,b]$ 内 f 连续的一切点 x 有 $f(x)=0$ 时方成立.

证 必要性: 设 f 在点 x_0 连续, 但 $f(x_0)\neq0$, 则存在 $\delta>0,[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$, 使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

于是

$$\int_a^b f^2(x)dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)dx>\frac{\delta f^2(x_0)}{2}>0,$$

这与假设 $\int_a^b f^2(x)dx=0$ 矛盾.

充分性: 即要证明 f 在 $[a,b]$ 上可积的条件下, 假设 f 在一切连续点 x_0 处均有 $f(x_0)=0$, 则必有

$$\int_a^b f^2(x)dx=0.$$

因 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故由本章问题 14 可知, f 在 $[a,b]$ 上的全体连续点集 E 在 $[a,b]$ 中稠密. 因此, 由 $f(x_0)=0$ 便知, 对于 $[a,b]$ 的任一分划, 均可适当地取 $\zeta_i\in[x_i,x_{i+1}]$, 使 $f(\zeta_i)=0$, 从而积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\zeta_i)\Delta x_i=0.$$

因此

$$\int_a^b f^2(x)dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\zeta_i)\Delta x_i=0.$$

20. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)x^n dx=0\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

证明 f 在每一连续点处等于零.

证 因 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故存在 $M>0$, 使 $|f(x)|\leqslant M$. 由本章问题 18, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在多项式 p, 使

$$\int_a^b |f(x)-p(x)|dx<\varepsilon.$$

又据题设, 有

$$\int_a^b f(x)p(x)dx=0,$$

从而

$$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant M\int_a^b |f(x)-p(x)|dx+\int_a^b f(x)p(x)dx<M\varepsilon.$$

因 ε 是任意常数, 故

$$\int_a^b f^2(x)dx=0.$$

由本章问题 19 知命题成立.

21. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且

$$\int_a^b f(x)x^k dx=0\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

证明 f 或者恒等于零, 或者在 (a,b) 上至少改变 n 次符号.

证 不妨设 f 不恒为零, 我们用反证法证明. 假如 f 在 (a,b) 上至多只改变 $n-1$ 次符号, 那么必存在 k 个分点 $\{x_k\}$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$, 使 f 在每个小区间

$(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, b)$ 上不恒为零, 且不改变符号, 但在相邻的两个区间上符号相异. 因此, 函数

$$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

在 (a, b) 上保持同一符号, 又据题设知

$$\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)dx = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1),$$

从而 $f(x)(x-x_1)\cdots(x-x_k) \equiv 0$, 即 $f(x) \equiv 0$, 这与 f 不恒为零矛盾.

22. 设函数 f 在闭区间 $[A, B]$ 上可积. 证明 f 具有**积分的连续性**, 即

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0 \quad (A < a < b < B).$$

证 对任给 $\varepsilon > 0$, 因 f 在 $[A, B]$ 上可积, 故存在 $[A, B]$ 上的连续函数 φ, 使

$$\int_A^B |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 φ 在 $[A, B]$ 上一致连续, 故存在 $\delta > 0$, 使当 $x', x'' \in [A, B], |x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是, 当 $|h| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx &\leqslant \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h)|dx \\ &\quad + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)|dx + \int_a^b |\varphi(x) - f(x)|dx \\ &\leqslant 2\int_A^B |f(x) - \varphi(x)|dx + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)|dx \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0.$$

23. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且对 $[a, b]$ 上任何满足 $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ 的连续函数 φ, 都有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

证明 f 必为常值函数.

证法 1 令

$$\varphi_0(x)=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

则 φ_0 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\int_a^b \varphi_0(x)dx=0$, 故

$$\int_a^b \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]\varphi_0(x)dx=0. \tag{1}$$

由题设得

$$\int_a^b f(x)\varphi_0(x)dx=0. \tag{2}$$

再由 (1),(2) 得

$$\int_a^b \left[f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]\varphi_0(x)dx=0,$$

即 $\int_a^b \varphi_0^2(x)dx=0$, 故 $\varphi_0(x)\equiv 0$, 即

$$f(x)\equiv\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

证法 2 (反证法) 假如不然, 则有 $x_0,x_1\in(a,b)$, 使得

$$f(x_0)>f(x_1).$$

于是, 据 f 的连续性, 应有 $\delta>0$, 使得

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b],$$
$$(x_1-\delta,x_1+\delta)\subset[a,b],$$

且有

$$\inf_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x)>\sup_{x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)} f(x).$$

我们令

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\delta^2-(x-x_i)^2, & |x-x_i|\leqslant\delta \quad (i=0,1),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然, φ_i 在 $[a,b]$ 上连续, 且有

$$\int_a^b \varphi_0(x)dx=\int_a^b \varphi_1(x)dx>0.$$

令 $\varphi(x)=\varphi_0(x)-\varphi_1(x)$, 则 $\int_a^b \varphi(x)dx=0$. 但却有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\varphi_0(x)dx-\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\varphi_1(x)f(x)dx\\ &\geqslant \inf_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\varphi_0(x)dx\\ &\quad -\sup_{x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)} f(x)\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}\varphi_1(x)dx\\ &= \int_a^b \varphi_0(x)dx\left[\inf_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} f(x)-\sup_{x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)} f(x)\right]\\ &> 0.\end{aligned}$$

这与题设发生矛盾. 因此, f 必为常值函数.

24. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积. 证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px dx=0,$$
$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px dx=0.$$

证　对任意有界区间 $[\alpha,\beta]$ 有

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin px dx\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\leqslant\frac{2}{p}.$$

设在 $[a,b]$ 上 $|f(x)|\leqslant M$. 任给 $\varepsilon>0$, 则存在 $[a,b]$ 的分划 T:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使 $S(T,f)-s(T,f)<\frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $S(T,f)$ 与 $s(T,f)$ 分别代表 f 关于 T 的上、下 Darboux 和. 于是当 $p\geqslant 4n\frac{M}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin px dx\right| &= \left|\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x_k)+f(x)-f(x_k)]\sin px dx\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^n\left\{|f(x_k)|\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin px dx\right|+\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)||\sin px|dx\right\}\\ &< \frac{2nM}{p}+[S(T,f)-s(T,f)]<\frac{2nM}{p}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin px dx=0.$$

同理可证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos px dx=0.$$

25. 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续正值函数. 令 $M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$. 证明

$$M=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}.$$

证 显然

$$\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b M^n dx}=M\sqrt[n]{b-a},$$

所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}\leqslant\lim_{n\to\infty}M\sqrt[n]{b-a}=M.$$

因 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故必存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=M$. 不妨设 $a<x_0<b$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)>M-\varepsilon(x_0\leqslant x<x_0+\delta)$, 故

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}&\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}[f(x)]^n dx}\\&\geqslant\sqrt[n]{\int_{x_0}^{x_0+\delta}(M-\varepsilon)^n dx}=(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta},\end{aligned}$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}\geqslant\lim_{n\to\infty}(M-\varepsilon)\sqrt[n]{\delta}=M-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 得

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}\geqslant M\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b [f(x)]^n dx}=M.$$

26. 设 φ 和 f 都是区间 $[a,b]$ 上的正值连续函数. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

证 令 $\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=f(\zeta)$ $(a\leqslant\zeta\leqslant b)$. 任给 ε $(0<\varepsilon<f(\zeta))$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-\zeta|<\delta$ 时就有

$$0<f(\zeta)-\varepsilon<f(x)\leqslant f(\zeta).$$

从而

$$\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}[f(\zeta)-\varepsilon]^n\varphi(x)dx \leqslant \int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}[f(x)]^n\varphi(x)dx$$
$$\leqslant \int_a^b [f(x)]^n\varphi(x)dx \leqslant [f(\zeta)]^n\int_a^b \varphi(x)dx.$$

所以

$$[f(\zeta)-\varepsilon]^n\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}\varphi(x)dx \leqslant \int_a^b [f(x)]^n\varphi(x)dx$$
$$\leqslant [f(\zeta)]^n\int_a^b \varphi(x)dx.$$

上式中若 $\zeta-\delta<a$, 则下限用 a 代替; 若 $\zeta+\delta>b$, 则上限用 b 代替. 于是

$$[f(\zeta)-\varepsilon]\sqrt[n]{\int_{\zeta-\delta}^{\zeta+\delta}\varphi(x)dx} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx}$$
$$\leqslant f(\zeta)\sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x)dx}.$$

令 $n\to\infty, \varepsilon\to 0$, 即得所证.

27. 设函数 φ 与 f 在区间 $[a,b]$ 上正值连续. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^{n+1}dx}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

证

$$I_n = \int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx = \int_a^b \sqrt{\varphi(x)}[f(x)]^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\varphi(x)}[f(x)]^{\frac{n+1}{2}}dx.$$
$$I_n^2 \leqslant \int_a^b \varphi(x)[f(x)]^{n-1}dx\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^{n+1}dx = I_{n-1}I_{n+1},$$

故

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \geqslant \frac{I_n}{I_{n-1}}.$$

因此, 数列 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 是递增的. 又

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)\frac{I_n}{I_n} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),$$

故 $\left\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\right\}$ 有界. 于是, $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}.$$

由本章问题 26 知, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{I_n}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^{n+1}dx}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)[f(x)]^n dx}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

28. 证明: 不存在区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数 f, 使得

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\quad \int_0^1 f(x)xdx=\alpha,\quad \int_0^1 f(x)x^2dx=\alpha^2,$$

此处 α 为给定的实数.

证 第一方程乘 α^2, 第二方程乘 -2α, 第三方程乘 1, 相加得到

$$\int_0^1 f(x)(\alpha-x)^2dx=0.$$

因此, $f(x)\equiv 0$. 可见对任何实数 α, 不存在满足上述方程的正值连续函数 f.

29. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

证明: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 f 恒为零.

证 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$. 因 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 故 $f'(x)=f(x)$, 即

$$\frac{df(x)}{f(x)}=dx.$$

因而 $\ln f(x)=x+\ln C, f(x)=Ce^x$. 由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 故 $f(x)\equiv 0$.

30. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 均有

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leqslant M(\beta-\alpha)^{1+\delta}\quad (M>0,\delta>0).$$

证明 $f(x)\equiv 0$.

证 (反证法) 假若存在 $\zeta \in [a,b]$ 而有 $f(\zeta) \neq 0$. 不妨设 $\zeta \in (a,b)$ 且 $f(\zeta) > 0$. 因 f 连续, 故存在以 ζ 为中心的区间 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 使对任意 $x \in [\alpha,\beta]$, 都有 $f(x) > 0$. 令 $\beta_n = \zeta + \varepsilon_n, \alpha_n = \zeta - \varepsilon_n, \varepsilon_n > 0, \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. 由积分中值定理得到

$$\int_{\zeta-\varepsilon_n}^{\zeta+\varepsilon_n} f(x)dx = 2f(\zeta_n)\varepsilon_n, \quad \zeta_n \in (\alpha_n, \beta_n).$$

又由题设

$$\int_{\zeta-\varepsilon_n}^{\zeta+\varepsilon_n} f(x)dx \leqslant M(2\varepsilon_n)^{1+\delta},$$

故有 $f(\zeta_n) \leqslant M(2\varepsilon_n)\delta$, 从而得到

$$f(\zeta) = \lim_{n\to\infty} f(\zeta_n) \leqslant M \lim_{n\to\infty} (2\varepsilon_n)^\delta = 0,$$

矛盾.

31. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 函数

$$\varphi(x) = f(x)\int_0^x f(t)dt$$

单调递减, 证明 $f(x) \equiv 0$.

证 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则 $F(0) = 0$, 且

$$\varphi(x) = f(x)\int_0^x f(t)dt = F'(x)F(x),$$

因此

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \int_0^x F'(t)F(t)dt = \frac{1}{2}F^2(x).$$

又因 $\varphi(0) = 0$, φ 是递减的, 故无论 x 为正或为负, 总有

$$\int_0^x \varphi(t)dt \leqslant 0,$$

即 $\frac{1}{2}F^2(x) \leqslant 0$, 故 $F(x) \equiv 0$. 对 x 求导得 $f(x) \equiv 0$.

32. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 且 $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$, 证明 $f(x) \equiv 0$.

证法 1 任取 $x_0 \in (0,+\infty)$, 因 $f(0) = 0$, 故

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt.$$

于是

$$|f(x)| \leqslant \int_0^x |f'(t)|dt \leqslant \int_0^x |f(t)|dt \leqslant Mx, \tag{1}$$

其中 $x \in [0, x_0], M = \max_{0 \leqslant t \leqslant x_0} |f(t)|$.

在 (1) 式中迭代可得

$$
\begin{aligned}
&|f(x)| \leqslant \int_0^x |f(t)|dt \leqslant \int_0^x Mtdt = \frac{M}{2!}x^2,\\
&\cdots\cdots,\\
&|f(x)| \leqslant \frac{M}{n!}x^n \quad (n = 1, 2, \cdots).
\end{aligned}
$$

因此, $|f(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{Mx^n}{n!} = 0$, 即 f 在 $[0, x_0]$ 上恒为零, 由 x_0 的任意性便知 f 在 $[0, +\infty)$ 上恒为零. 同理, f 在 $(-\infty, 0]$ 上亦恒为零.

证法 2 对任意 $\varepsilon > 0$, 若 f 在 $[0, 1-\varepsilon]$ 上不恒为零, 则必有 $x_0 \in (0, 1-\varepsilon]$ 使得 $f(x_0) \neq 0$, 且对任意 $x \in [0, 1-\varepsilon]$ 有 $|f(x_0)| \geqslant |f(x)|$. 因此, 由 $|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\zeta)|x_0$ $(\zeta \in (0, x_0))$ 知,

$$
|f'(\zeta)| = \frac{|f(x_0)|}{|x_0|} \geqslant \frac{|f(x_0)|}{1-\varepsilon} > |f(x_0)| \geqslant |f(\zeta)|,
$$

与题设矛盾. 故于 $[0, 1-\varepsilon]$ 上 f 恒为零. 由 f 的连续性及 ε 的任意性便知 f 于 $[0, 1]$ 上恒为零.

对正整数 n_0, 若已知 f 于 $[0, n_0]$ 上恒为零, 但于 $[0, n_0+1-\varepsilon]$ 上不恒为零, 则有 $x_1 \in (n_0, n_0+1-\varepsilon]$, 使

$$
|f(x_1)| = \max_{x \in [n_0, n_0+1-\varepsilon]} |f(x)| > 0.
$$

而

$$
|f(x_1)| = |f(x_1) - f(n_0)| = |f'(\zeta_1)|(x_1 - n_0)(\zeta_1 \in (n_0, x_1)),
$$

故

$$
|f'(\zeta_1)| = \frac{|f(x_1)|}{(x_1 - n_0)} \geqslant \frac{|f(x_1)|}{1-\varepsilon} > |f(x_1)| \geqslant |f(\zeta_1)|,
$$

矛盾. 于是在 $[0, n_0+1-\varepsilon]$ 上 f 恒为零. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及 f 的连续性, 又知 f 于 $[0, n_0+1]$ 上恒为零. 由归纳法知 f 于 $[0, +\infty]$ 上恒为零.

同理可证, f 于 $(-\infty, 0]$ 上亦恒为零.

33. 设 f 是 $[a, b]$ 上存在一阶连续导数的非零函数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明存在一点 $c \in (a, b)$, 使得

$$
|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx.
$$

证　令 $M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$. 由微分中值定理得到

$$\begin{aligned}&f(x)=f'(t)(x-a)\leqslant M(x-a),\quad a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2},\\&f(x)=f'(s)(x-b)\leqslant M(b-x),\\&\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b,\quad a<t<x,\quad x<s<b.\end{aligned}$$

因函数

$$g(x)=\begin{cases}M(x-a), & a\leqslant x\leqslant\dfrac{a+b}{2},\\ M(b-x), & \dfrac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处是不可微的, 故不能同时有 $f(x)=M(x-a)\left(a\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}\right)$ 与 $f(x)=M(b-x)\left(\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b\right)$. 因此, 令 $m=\frac{a+b}{2}$, 即得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&<M\int_0^m(x-a)dx+M\int_m^b(b-x)dx\\&=M\frac{(b-a)^2}{4},\end{aligned}$$

或者

$$M>\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx.$$

34. 设 f 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(0)=f(1)=0, f(x)\neq 0, x\in(0,1)$. 证明

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant 4.$$

证　因 $f(0)=f(1)=0$, 故由微分中值定理, 存在 $\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\zeta)=0$.

我们在区间 $[0,\zeta]$ 和 $[\zeta,1]$ 上分别估计 $|f(x)|$ 之值. 当 $x\in[0,\zeta]$ 时, 因为

$$f'(x)=-\int_x^\zeta f''(x)dx,\quad |f'(x)|\leqslant\int_0^\zeta|f''(x)|dx,\quad f(x)=\int_0^x f'(x)dx,$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\int_0^x|f'(x)|dx\leqslant\int_0^\zeta|f'(x)|dx\\&=|f'(\zeta_1)|\zeta\leqslant\zeta\int_0^\zeta|f''(x)|dx,\end{aligned}$$

即

$$|f(x)|\leqslant\zeta\int_0^\zeta|f''(x)|dx,\quad x\in[0,\zeta]. \tag{1}$$

当 $x \in [\zeta, 1]$ 时, 因为

$$f'(x) = \int_{\zeta}^{x} f''(x)dx, \quad |f'(x)| \leqslant \int_{\zeta}^{1} |f''(x)|dx, \quad f(x) = -\int_{x}^{1} f'(x)dx,$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant \int_{x}^{1} |f'(x)|dx \leqslant \int_{\zeta}^{1} |f'(x)|dx \\ &= (1-\zeta)|f'(\zeta_2)| \leqslant (1-\zeta)\int_{\zeta}^{1} |f''(x)|dx,\end{aligned}$$

即

$$|f(x)| \leqslant (1-\zeta)\int_{\zeta}^{1} |f''(x)|dx, \quad x \in [\zeta, 1]. \tag{2}$$

由 (1), (2) 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx &= \int_0^{\zeta} \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx + \int_{\zeta}^{1} \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \\ &\geqslant \int_0^{\zeta} \frac{|f''(x)|}{\zeta\displaystyle\int_0^{\zeta} |f''(x)|dx} dx + \int_{\zeta}^{1} \frac{|f''(x)|}{(1-\zeta)\displaystyle\int_{\zeta}^{1} |f''(x)|dx} dx \\ &= \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{1-\zeta} = \frac{1}{\zeta(1-\zeta)} = \frac{1}{\dfrac{1}{4} - \left(\zeta - \dfrac{1}{2}\right)^2} \geqslant 4.\end{aligned}$$

35. 证明: 每个含有第一类间断点的函数都没有原函数.

证 设 x_0 是函数 f 的第一类间断点——可去间断点或跳跃间断点. 假定 f 有原函数 F, 则

$$F'(x) = \begin{cases} f(x), & x > x_0, \\ f(x), & x < x_0. \end{cases}$$

当 x_0 是 f 的可去间断点时,

$$f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x),$$

故

$$\begin{aligned}F'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\zeta) \\ &\neq f(x_0) \quad (\zeta \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).\end{aligned}$$

因此 F 不是 f 的原函数.

当 x_0 是 f 的跳跃间断点时,

$$f(x_0+0)\neq f(x_0-0),$$

故

$$F'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}f(\zeta_1)=f(x_0+0).$$

同理可得 $F'_-(x_0)=f(x_0-0)$. 这说明 $F'(x_0)$ 不存在, 更不能等于 $f(x_0)$. 因此, F 不是 f 的原函数.

36. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a).$$

证　因 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故在 $[a,b]$ 上存在原函数, 设为 F. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)-F(a+h)+F(a)]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}\\&=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).\end{aligned}$$

37. 设 f 有连续的一阶导数, 且

$$0<f'(x)<\frac{1}{x^2}\quad(1\leqslant x<+\infty).$$

证明 $\lim_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

证　由 $f'(x)>0$ 知 f 在 $[1,+\infty)$ 上严格递增. 因

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)dt\leqslant\int_1^x\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{x}+1,$$

故 $f(x)<f(1)+1$ $(x>1)$. 据单调有界原理, $\lim_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

38. 设 f 在 $[0,1]$ 上有连续的一阶导数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.$$

证

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1 f(x)d\left(x-\frac{1}{2}\right)\\&=f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\bigg|_0^1-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f'(x)dx\\&=-\int_0^1 f'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx.\end{aligned}$$

由基本积分不等式得到

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)dx\right| &\leqslant \int_0^1 \left|f'(x)\right|\left|x-\frac{1}{2}\right| dx \\
&\leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx \\
&= \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|.
\end{aligned}
$$

39. 证明: 对 $x \geqslant 0$, 函数

$$
f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t dt
$$

的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

证 因 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n} x$, 故 $f'(x)$ 与 $x-x^2$ 同号. 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)>0$; 而当 $x>1$ 时, $f'(x)<0$, 故 f 在 $x=1$ 处取得最大值

$$
f(1)=\int_0^1 (t-t^2)\sin^{2n} t dt.
$$

因为 $\sin^{2n} t \leqslant t^{2n}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, 所以

$$
f(1)\leqslant \int_0^1 (t-t^2)t^{2n}dt=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.
$$

40. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 f(x)dx=0, \quad \int_0^1 xf(x)dx=0, \quad \cdots, \\
&\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx=0, \quad \int_0^1 x^n f(x)dx=1.
\end{aligned}
$$

证明: 在 $[0,1]$ 的某个子集上有 $|f(x)|\geqslant 2^n(n+1)$.

证 由给定的条件可知

$$
\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx=1.
$$

假如结论不成立, 则在 $[0,1]$ 上处处有 $|f(x)|<2^n(n+1)$. 于是

$$\begin{aligned}1&=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx\right|\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n|f(x)|dx\\&<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx\\&=2^n(n+1)\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(-1)^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^n dx\right]\\&=2^n(n+1)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}((-1)^n+1)\right]\\&=\frac{1}{2}[(-1)^n+1]\leqslant 1,\end{aligned}$$

从而导致矛盾.

41. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续非负函数, 且

$$\int_a^b f(x)dx=1.$$

证明

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2\leqslant 1,$$

其中 k 为任意实数.

证　因 $|\cos kx+i\sin kx|=1=|\cos kx-i\sin kx|$, 故

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2=\left[\int_a^b f(x)\cos kxdx+i\int_a^b f(x)\sin kxdx\right]\\&\left[\int_a^b f(x)\cos kxdx-i\int_a^b f(x)\sin kxdx\right]=\left[\int_a^b f(x)(\cos kx+i\sin kx)dx\right]\\&\left[\int_a^b f(x)(\cos kx-i\sin kx)dx\right]\leqslant\int_a^b|f(x)||\cos kx+i\sin kx|dx\\&\int_a^b|f(x)||\cos kx-i\sin kx|dx=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(x)dx=1.\end{aligned}$$

42. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微且 $f''(x)>0$, 又 φ 在 $[0,a](a>0)$ 上连续. 证明

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[\varphi(t)]dt\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a\varphi(t)dt\right].$$

证 令 $x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt$. 据 Taylor 公式,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(\zeta) \\ &\geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

因上式对任何 x 均成立, 故

$$f[\varphi(t)] \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(\varphi(t) - x_0),$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_0^a f[\varphi(t)]dt &\geqslant \int_0^a [f(x_0) + f'(x_0)(\varphi(t) - x_0)]dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0)\int_0^a \varphi(t)dt - x_0 af'(x_0) \\ &= af(x_0) + x_0 af'(x_0) - x_0 af'(x_0) = af(x_0). \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[\varphi(t)]dt \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right].$$

43. 设函数 f_0 在 $[0,1]$ 上可积, 且 $f_0(x) > 0$. 定义函数列

$$f_n(x) = \sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)dt} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

试求 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

解 设 $0 < \delta < 1$. 因 f_0 在 $[0,1]$ 上可积且 $f_0(x) > 0$, 故

$$f_1(x) = \sqrt{\int_0^x f_0(t)dt}$$

是 $[0,1]$ 上的连续函数. 于是存在正数 m, M 使得

$$m \leqslant f_1(x) \leqslant M.$$

对任一正整数 n, 用数学归纳法可以证明

$$m^{\frac{1}{2^n}} a_n (x - \delta)^{1 - \frac{1}{2^n}} \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1 - \frac{1}{2^n}},$$

其中

$$a_n = \left(\frac{2}{2^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \left(\frac{2^2}{2^3 - 1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots \left(\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因为

$$\ln a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ln \frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}} \ln \frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2} \ln \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \quad (n=1,2,\cdots),$$

所以根据 Toeplitz 定理 (容易验证此时定理中的条件全部满足) 有

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{1}{2-\dfrac{1}{2^{n-1}}} = \ln \frac{1}{2},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} M^{\frac{1}{2^n}} a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{x}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} m^{\frac{1}{2^n}} a_n (x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{x-\delta}{2}.$$

由 δ 的任意性即知对一切 $x \in (0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \frac{x}{2}.$$

又因 $f_{n+1}(0) = 0$ $(n=1,2,\cdots)$, 所以对一切 $x \in [0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \frac{x}{2}.$$

44. 设 f 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a)=0$. 证明

(i) $M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f'(x)]^2 dx$, 其中 $M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$.

(ii) $\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$.

证 (i) 由于

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) = f(x),$$

因此

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \leqslant \int_a^x 1^2 dt \int_a^x [f'(t)]^2 dt \\ &= (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dt \leqslant (b-a)\int_a^b [f'(t)]^2 dt \end{aligned}$$

从而有

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f'(t)]^2 dt.$$

(ii) 由上式得

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x)dx &\leqslant \int_a^b (x-a)dx \int_a^b [f'(x)]^2 dx \\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

45. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且满足

$$0 < m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

证明

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证 因为

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} \leqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

即

$$f(x)-(m+M)+\frac{mM}{f(x)} \leqslant 0,$$

故

$$\int_0^1 f(x)dx + mM\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leqslant m+M.$$

令 $u = mM\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$, 则

$$\int_0^1 f(x)dx + u \leqslant m+M,$$

或

$$u\int_0^1 f(x)dx \leqslant (m+M)u-u^2.$$

因函数 $g(u)=(m+M)u-u^2$ 在 $u=\frac{m+M}{2}$ 时取得最大值 $\frac{(m+M)^2}{4}$, 故

$$u\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{(m+M)^2}{4},$$

即

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}\right) \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

46. 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续可微. 证明

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 (|f(t)|+|f'(t)|)dt.$$

证 由分部积分公式有

$$\int_0^x tf'(t)dt = xf(x)-\int_0^x f(t)dt,$$

$$\int_x^1 (t-1)f'(t)dt = -xf(x)+f(x)-\int_x^1 f(t)dt.$$

相加得

$$\int_0^x tf'(t)dt+\int_x^1 tf'(t)dt-\int_x^1 f'(t)dt = f(x)-\int_0^1 f(x)dx,$$

即

$$f(x)=\int_0^x tf'(t)dt+\int_x^1[tf'(t)-f'(t)]dt+\int_0^1 f(x)dx,$$

从而有

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\int_0^x|f'(t)|dt+\int_x^1|f'(t)|dt+\int_0^1|f(t)|dt\\&=\int_0^1|f'(t)|dt+\int_0^1|f(t)|dt.\end{aligned}$$

47. 设实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足条件

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

证明方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证法 1　令

$$F(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1},$$

则 F 在 $[0,1]$ 上连续、可微, 且 $F(0)=F(1)=0$, 故由 Rolle 定理, 在 $(0,1)$ 内至少有一点 ζ 使 $F'(\zeta)=0$, 即

$$a_0+a_1\zeta+\cdots+a_n\zeta^n=0.$$

因此, ζ 是方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 的一个实根.

证法 2　设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, 则

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

由积分中值定理, 存在 $\zeta\in(0,1)$ 使得

$$f(\zeta)=\int_0^1 f(x)dx=0,$$

即 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有一实根.

48. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=0.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\quad([22],1980,\text{p. }396).$$

证　令 $F(x)=f'(x)+f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$, 由题设, 存在 $x_0>0$, 使当 $x>x_0$ 时有

$$|F(x)|=|f'(x)+f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{1}$$

又 $e^x F(x)=[e^x f(x)]'$, 将此式从 x_0 到 x 积分, 得到

$$e^x f(x)=e^{x_0} f(x_0)+\int_{x_0}^{x} e^t F(t)dt,$$

即

$$f(x)=\frac{e^{x_0} f(x_0)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^t F(t)dt,}{e^x}. \tag{2}$$

由 (1), (2), 得到

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant e^{-x}\left[e^{x_0}|f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}\int_{x_0}^{x} e^t dt\right]\\ &=e^{-x+x_0}|f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}e^{-x+x_0}\\ &<e^{-x+x_0}|f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

取 $n_0>x_0$ 使 $e^{-n_0+x_0}|f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $x>n_0$ 时有 $e^{-x+x_0}|f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是, 当 $x>n_0>x_0$ 时 $|f(x)|<\varepsilon$, 故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

49. 在闭区间 $[0,2]$ 上是否存在满足下列条件的函数 f? f 连续可微, 并且

$$f(0)=f(2)=1, \quad |f'(x)|\leqslant 1, \quad \left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leqslant 1.$$

解 假如存在满足所给条件的函数 f, 那么当 $x\in(0,2)$ 时, 由微分中值定理得到

$$f(x)=1+f'(\zeta_1)x=1+f'(\zeta_2)(2-x),$$

这里 $\zeta_1\in(0,x),\zeta_2\in(x,2)$. 由此分别得到

$$f(x)\geqslant 1-x, \quad f(x)\geqslant x-1,$$

及

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &\geqslant \int_0^1 (1-x)dx=\frac{1}{2},\\ \int_1^2 f(x)dx &\geqslant \int_1^2 (x-1)dx=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

并且等式不可能同时成立, 因为如果 $f(x)=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $f(x)=x-1$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$ 同时成立, 那么将导致 f 在 $x=1$ 不可微的矛盾. 因此

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>1.$$

但这又与最后一个条件矛盾.

综上所述, 可见不存在满足所提出的诸条件的函数.

50. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的正值连续函数, 且 $f(-x)=f(x)$. 令

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt \quad (-a\leqslant x\leqslant a, a>0).$$

(i) 证明 g' 在 $[-a,a]$ 上严格递增.

(ii) 求使 $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上取得最小值的点 x.

(iii) 若 g 的最小值 (它依赖于 a) 等于 $f(a)-a^2-1$, 求 $f(x)$.

证 (i)

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)dt-\int_{x}^{a}(x-t)f(t)dt\\&=x\int_{-a}^{x}f(t)dt-\int_{-a}^{x}tf(t)dt+x\int_{a}^{x}f(t)dt-\int_{a}^{x}tf(t)dt.\end{aligned}$$

因 f 连续, 故上式各项均可微, 得

$$\begin{aligned}g'(x)&=\int_{-a}^{x}f(t)dt+\int_{a}^{x}f(t)dt,\\g''(x)&=2f(x)>0.\end{aligned}$$

因此, g' 在 $[-a,a]$ 上是严格递增的.

(ii)

$$\begin{aligned}g'(-a)&=-\int_{-a}^{a}f(t)dt<0,\\g'(a)&=\int_{-a}^{a}f(t)dt>0,\end{aligned}$$

而 g' 是严格递增的, 故 $g'(x)=0$ 在 $[-a,a]$ 上有唯一解. 又 $f(-t)=f(t)$, 故

$$\int_{-a}^{0}f(t)dt=\int_{0}^{a}f(t)dt.$$

因此 $g'(0)=0$, 即 $g'(x)=0$ 的唯一实根是 $x=0$. 又知当 $-a\leqslant x<0$ 时, $g'(x)<0$, 而当 $0<x\leqslant a$ 时, $g'(x)>0$, 故 $g(0)$ 是最小值.

(iii)

$$\begin{aligned}g(0)&=-\int_{-a}^{0}tf(t)dt-\int_{a}^{0}tf(t)dt\\&=\int_{0}^{a}tf(t)dt+\int_{0}^{a}tf(t)dt=2\int_{0}^{a}tf(t)dt.\end{aligned}$$

又因 $g(0)=f(a)-a^2-1$, 故得

$$2\int_{0}^{a}tf(t)dt=f(a)-a^2-1.$$

此式对一切 $a>0$ 均成立, 令 $a\to 0+$, 则 $f(0)-1=0$, 故 $f(0)=1$. 对 a 微分, 得

$$2af(a)=f'(a)-2a,$$

即

$$\frac{f'(a)}{f(a)+1}=2a,\quad \ln(f(a)+1)=a^2+C.$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=\ln 2$, 于是 $f(a)=2e^{a^2}-1$, 即

$$f(x)=2e^{x^2}-1.$$

51. 设函数 $\varphi_k(x)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且对每一 k, 有

$$\int_0^1 \varphi_k^2(x)dx=1.$$

证明对任意正整数 n, 存在实数 $c_1,\cdots,c_n$, 满足 $\sum_{k=1}^n c_k^2=1$, 且 $\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\geqslant\sqrt{n}$.

证 由题设知对任意正整数 n, 都有

$$\sum_{k=1}^n\int_0^1 \varphi_k^2(x)dx=n,$$

即

$$\int_0^1\left[\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(x)\right]dx=n.$$

由积分中值定理, 存在 $\zeta\in[0,1]$ 使 $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta)=n$. 令

$$c_k=\varphi_k(\zeta)/\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta)\right)^{\frac{1}{2}}\quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则 $\sum_{k=1}^n c_k^2=1$, 且

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x)\geqslant\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(\zeta)=\sqrt{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(\zeta)}=\sqrt{n}.$$

52. 设 $a>0, f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可微. 证明

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|dx+\int_0^a|f'(x)|dx.$$

证 由积分第一中值定理知

$$\int_0^a f(x)dx=f(\zeta)a,\quad 0<\zeta<a.$$

又

$$f(\zeta) - f(0) = \int_0^{\zeta} f'(x)dx,$$

因此

$$\begin{aligned}
|f(0)| &\leqslant |f(\zeta)| + \left|\int_0^{\zeta} f'(x)dx\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx\right| + \int_0^a |f'(x)|dx \\
&\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx.
\end{aligned}$$

53. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且满足

$$f(1) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0.$$

证明: 至少存在一点 $\zeta \in (0,1)$, 使得

$$f'(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{\zeta}.$$

证　因 $f(1) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$, 故由积分第一中值定理, 存在 $\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 使得

$$f(1) - 2\eta f(\eta)\frac{1}{2} = 0,$$

即 $\eta f(\eta) = f(1)$. 欲证 $f'(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{\zeta}$, 只要证明 $[xf(x)]'|_{x=\zeta} = 0$ 即可. 为此, 令

$$F(x) = xf(x).$$

显然, F 在 $[\eta,1]$ 上连续, 在 $(\eta,1)$ 内可微, 且 $F(\eta) = F(1)$. 于是由 Rolle 定理可知, 存在 $\zeta \in (\eta,1)$, 使得 $F'(\zeta) = 0$, 即

$$f'(\zeta) = -\frac{f(\zeta)}{\zeta}.$$

54. 设 $f(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant x$ 上连续, 则存在 c, 使 $a < c < x$, 且

$$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a).$$

证明: 若 f 在点 a 可微且 $f'(a) \neq 0$, 则当 x 逼近 a 时, c 逼近 a 与 x 的中点, 即

$$\lim_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} = \frac{1}{2}.$$

证 考虑

$$I=\lim_{x\to a}\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)dt-xf(a)+af(a)}{(x-a)^2}$$

由积分中值定理, 得

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to a}\frac{f(c)(x-a)-f(a)(x-a)}{(x-a)^2}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(c)-f(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{x-a}\\&=f'(a)\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}.\end{aligned}$$

另一方面, 应用 L'Hospital 法则, 得到

$$I=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)}=\frac{f'(a)}{2}.$$

因此

$$\lim_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

这个问题是由 Jacobson[48] 提出并证明的.

55. 设 f 是 $[0,1]$ 上的递减函数. 证明对于 $0<\alpha<\beta\leqslant 1$, 下列不等式成立:

$$\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

证 因 f 在 $[0,1]$ 上递减, 故有

$$\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant \alpha f(\alpha),$$
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\leqslant(\beta-\alpha)f(\alpha).$$

因此

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant f(\alpha)\geqslant\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

由此得到

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant\int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

即

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\int_0^\alpha f(x)dx\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

由 $0<\alpha<\beta\leqslant 1$ 知 $\frac{1-\alpha}{\beta}<1$, 于是

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

56. 设 n,k 为正整数, 且 $1\leqslant k\leqslant n$. 证明

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\pi\right) &\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\ln(1+x)dx\\ &\leqslant \frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\pi\right),\end{aligned}$$

并求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} |\sin nx|\ln(1+x)dx.$$

证　因当 $x>0$ 时, $\ln x$ 是递增函数, 故当 $\frac{k-1}{n}\pi\leqslant x\leqslant \frac{k}{n}\pi$ 时, 有

$$\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\pi\right)\leqslant \ln(1+x)\leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n}\pi\right).$$

又 $|\sin nx|\geqslant 0$, 故

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\pi\right)dx &\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\ln(1+x)dx\\ &\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\ln\left(1+\frac{k}{n}\pi\right)dx.\end{aligned}$$

而

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|dx = \frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|dt = \frac{2}{n},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\pi\right) &\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin nx|\ln(1+x)dx\\ &\leqslant \frac{2}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\pi\right).\end{aligned}$$

取 $k=1,2,\cdots,n$, 并边边相加, 得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\ln\left(1+\frac{k-1}{n}\pi\right) &\leqslant \int_0^{\pi} |\sin nx|\ln(1+x)dx\\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\pi\right).\end{aligned}$$

上式两端分别是函数 $\frac{2}{\pi}\ln x$ 在区间 $[1,1+\pi]$ 上的积分小和与大和, 因此, 令 $n\to\infty$ 便得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|\ln(1+x)dx &= \frac{2}{\pi}\int_1^{1+\pi}\ln x dx\\ &= \frac{2(1+\pi)}{\pi}\ln(1+\pi)-2.\end{aligned}$$

57. 设 f 在区间 $[0,\pi]$ 上连续, 求

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|f(x)dx.$$

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|f(x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk})\int_0^{\pi}\sin t dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_{nk}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx.\end{aligned}$$

58. 设 f 在 $[-1,1]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=\pi f(0).$$

证　因

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}dx &= \lim_{h\to 0+}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{1}\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,\end{aligned}$$

故只需证明

$$\lim_{h\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx=0. \tag{1}$$

而

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx\right| &\leqslant 2M\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}dx = 2M\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt{h}}\\ &\to 0\quad (h\to 0+),\end{aligned} \tag{2}$$

同理,

$$\left|\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}[f(x)-f(0)]dx\right|\to 0\quad (h\to 0+).\tag{3}$$

又由积分第一中值定理, 得到

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]dx &= [f(\xi)-f(0)]\arctan\frac{x}{h}\bigg|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\\ &\to 0\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0\quad (h\to 0+).\end{aligned}\tag{4}$$

由 (2), (3), (4) 知 (1) 成立.

59. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 以 T 为周期且在 $[0,T]$ 上可积. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx.$$

证 设 $g(x)\geqslant 0, x\in[0,T]$, 取正整数 m, 使 $[a,b]\subset[-mT,mT]$, 做辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b]\\ 0, & x\in[-mT,mT]\backslash[a,b].\end{cases}$$

易知, 下列积分及积分等式

$$\int_a^b f(x)g(nx)dx=\int_{-mT}^{mT}F(x)g(nx)dx\quad (n=1,2,\cdots),$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_{-mT}^{mT}F(x)dx$$

是存在和成立的.

将区间 $[-mT,mT]$ $2mn$ 等分, 得分划 $L:-\frac{mn}{n}T<-\frac{mn-1}{n}T<\cdots<-\frac{T}{n}<0<\frac{T}{n}<\cdots<\frac{mn-1}{n}T<\frac{mn}{n}T$, 于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(nx)dx &= \int_{-mT}^{mT}F(x)g(nx)dx\\ &= \sum_{k=-mn}^{mn-1}\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}F(x)g(nx)dx.\end{aligned}$$

显然, $F(x), g(nx)$ 在区间 $\left(\frac{k}{n}T,\frac{k+1}{n}T\right)$ 上可积, 且 $g(nx)\geqslant 0, F(x)$ 在 $\left(\frac{k}{n}T,\frac{k+1}{n}T\right)$ 上必有上确界 M_k 和下确界 m_k, 故由积分第一中值定理, 有 $c_k\in[m_k,M_k]$ 使

$$\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}F(x)g(nx)dx=c_k\int_{\frac{k}{n}T}^{\frac{k+1}{n}T}g(nx)dx=\frac{c_k}{n}\int_0^T g(t+kT)dt=\frac{c_k}{n}\int_0^T g(x)dx,$$
$$k=-mn,-mn+1,\cdots,mn-1.$$

代入上式得

$$\int_a^b f(x)g(nx)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \sum_{k=-mn}^{mn-1} c_k \frac{T}{n}.$$

由于 $\sum_{k=-mn}^{mn-1} c_k \frac{T}{n}$ 介于 $F(x)$ 在分划 L 上的 Darboux 大、小和之间, 故当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)dx &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-mn}^{mn-1} c_k \frac{T}{n}\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_{-mT}^{mT} F(x)dx\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

若去掉 $g(x)\geqslant 0$ 这个限制, 设

$$g(x) = \frac{|g(x)|+g(x)}{2} - \frac{|g(x)|-g(x)}{2},$$

则分别由上面已证结果, 易知结论正确.

60. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 又

$$s(x) = 4[x] - 2[2x] + 1.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)s(nx)dx = 0.$$

证

$$\begin{aligned}s(x+1) &= 4[x+1] - 2[2(x+1)] + 1\\ &= 4[x] + 4 - 2[2x] - 4 + 1\\ &= s(x).\end{aligned}$$

由本章问题 59 知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)s(nx)dx &= \int_0^1 s(x)dx \int_0^1 f(x)dx\\ &= \left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}\left\{\int_0^1 4[x]dx - \int_0^{\frac{1}{2}} 2[2x]dx\right.\\ &\qquad \left. - \int_{\frac{1}{2}}^1 2[2x]dx + \int_0^1 dx\right\} = 0.\end{aligned}$$

61. 设 f 在 $[a,b]$ 上可积且是凸函数, 即对任意 $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 都有

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).$$

证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

证 令 $\lambda_1=\frac{b-x}{b-a}, \lambda_2=\frac{x-a}{b-a}$. 显然, 当 $x\in[a,b]$ 时, $\lambda_1,\lambda_2 \geqslant 0$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 由 f 的凸性得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 a+\lambda_2 b) \leqslant \lambda_1 f(a)+\lambda_2 f(b) \\ &= \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b). \end{aligned}$$

两边从 a 到 b 积分得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\leqslant \int_a^b \left[\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]dx \\ &= \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a), \end{aligned}$$

故右边不等式得证. 又由积分的换元法有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt \\ &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{0} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt+\int_0^{\frac{b-a}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)dt \\ &= \int_0^{\frac{b-a}{2}} \left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]dt \\ &\geqslant \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]dt \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \end{aligned}$$

故左边的不等式也得证.

62. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上递增, 对于任何 $T>0, f$ 在 $[0,T]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=C.$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=C.$$

证 设 $x > 0$, 因 f 在 $[0, +\infty)$ 上递增, 故当 $t < x$ 时有 $f(t) \leqslant f(x)$. 两边对 t 从 0 到 x 积分, 得到

$$\int_0^x f(t)dt \leqslant \int_0^x f(x)dt = xf(x),$$

即

$$f(x) \geqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt. \tag{1}$$

当 $t > x$ 时有 $f(t) \geqslant f(x)$. 两边对 t 从 x 到 $2x$ 积分, 得到

$$\int_x^{2x} f(t)dt \geqslant \int_x^{2x} f(x)dt = xf(x),$$

即

$$f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt = 2 \cdot \frac{1}{2x}\left[\int_0^{2x} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right]. \tag{2}$$

由 (1), (2) 两式得到

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{2x}\left[\int_0^{2x} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right].$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)dt = C,$$

所以

$$C \leqslant \lim_{x\to+\infty} f(x) \leqslant 2C - C,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = C.$$

63. 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证 因 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, 且 $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

又因 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 故对 $\varepsilon_1 = \delta\varepsilon$ 而言, 存在正数 M, 使当 $x > M$ 时, 有

$$\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right| \leqslant \delta_\varepsilon.$$

现在考虑积分 $\int_x^{x+\delta} f(t)dt$. 当 $x \leqslant t \leqslant x + \delta$ 时, 有 $f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon$, 从而

$$\int_x^{x+\delta} f(t)dt - \delta\varepsilon \leqslant \int_x^{x+\delta} f(x)dt \leqslant \int_x^{x+\delta} f(t)dt + \delta\varepsilon.$$

当 $x>M$ 时,

$$\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt-\delta\varepsilon\right| \leqslant \left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt\right|+\delta\varepsilon \leqslant 2\delta\varepsilon.$$

同理可证

$$\left|\int_x^{x+\delta} f(t)dt+\delta\varepsilon\right| \leqslant 2\delta\varepsilon.$$

所以

$$|f(x)\delta|=\left|\int_x^{x+\delta} f(x)dt\right| \leqslant 2\delta\varepsilon.$$

即当 $x>M$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, 故

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

64. 设 f 在 $(0,1]$ 上单调, 且 $\int_0^1 x^\alpha f(x)dx$ 存在. 证明

$$\lim_{x\to0+} x^{\alpha+1} f(x)=0.$$

证 不妨设 f 递减, 则当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,

$$\int_{\frac{x}{2}}^x t^\alpha f(t)dt \geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^x t^\alpha dt = x^{\alpha+1} f(x)\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$
$$\int_x^{2x} t^\alpha f(t)dt \leqslant f(x)\int_x^{2x} t^\alpha dt = x^{\alpha+1} f(x)\frac{2^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$$

(当 $\alpha=-1$ 时最后的两个因子应该换成 $\ln 2$). 由上述不等式, 并利用积分存在的 Cauchy 准则, 即可完成证明.

作为上述结果的直接推论, 可得如下事实:

设 f 在 $[1,+\infty)$ 上单调, 且 $\int_1^{+\infty} x^\alpha f(x)dx$ 存在, 则 $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1} f(x)=0$.

65. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上递减且 $f(x)>0$. 证明广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx$ 同时收敛或发散.

证 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时, 由 f 的非负性得 $f(x) \geqslant f(x)\sin^2 x \geqslant 0$. 于是由比较判别法便知 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 xdx$ 收敛.

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, 因为

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)dx\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi} f(a+n\pi+t)dt \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\pi f(a+n\pi),\end{aligned}$$

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n\pi)$ 发散. 又因为

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi} f(x)\sin^2 x dx \\
&\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} f[a+(n+1)\pi]\int_{a+n\pi}^{a+(n+1)\pi}\sin^2 x dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f[a+(n+1)\pi]\int_0^{\pi}\sin^2 x dx \\
&= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f(a+n\pi).
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a+n\pi)$ 发散, 故由比较判别法知 $\int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$ 发散.

66. 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上递减的连续函数, 且 $f(x)>0$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx.$$

证 因 f 是 $(0,+\infty)$ 上递减的连续函数, 故

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n} f(x)dx\right) \\
&= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \\
&= \int_n^{n+1}[f(n+1)-f(x)]dx \leqslant 0 \quad (n=1,2,\cdots).
\end{aligned}$$

又对任意 n, 有

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(k)dx - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dx \\
&= f(n) + \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx > 0.
\end{aligned}$$

因此, 数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界, 从而收敛.

67. 设 f 在 $(0,1]$ 上单调且 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

反之, 如果上式左端极限存在. 证明 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在, 且等式成立.

证　不妨设 f 递减, 把区间 $(0,1]$ 分成 n 等分即有

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f(1).$$

同时又显然有

$$\int_0^1 f(x)dx\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

因此得到

$$0\leqslant\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx-\frac{1}{n}f(1).$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx-\frac{1}{n}f(1)\right)=0,$$

故

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

反之, 若上式右端极限存在, 则由

$$a_n=\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f(1)$$

知, 单调递增数列 $\{a_n\}$ 有上界, 从而 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在. 再注意, 我们可设 $f(x)\geqslant 0$ (否则只需考虑函数 $F(x)=f(x)-f(1)$), 故易知 $\int_0^1 f(x)dx$ 存在, 于是等式成立.

68. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调且广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛. 证明

$$\lim_{h\to 0+}h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)=\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

证　因 f 单调, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 故 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 从而 f 不变号. 不妨假设 $f(x)\geqslant 0$, 且递减. 于是有

$$\int_h^{(m+1)h} f(x)dx=\sum_{n=1}^{m}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx\leqslant\sum_{n=1}^{m}hf(nh),$$
$$\int_0^{mh} f(x)dx=\sum_{n=1}^{m}\int_{(n-1)h}^{nh} f(x)dx\geqslant\sum_{n=1}^{m}hf(nh).$$

故
$$\int_h^{(m+1)h} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^m hf(nh) \leqslant \int_0^{mh} f(x)dx.$$
令 $m \to +\infty$ 得
$$\int_h^{+\infty} f(x)dx \leqslant h\sum_{n=1}^\infty f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$
再令 $h \to 0+$ 得
$$\lim_{h\to 0+} h\sum_{n=1}^\infty f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

69. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛. 证明
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证 因 f' 连续, 故
$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a) \quad (x \geqslant a).$$
又 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛, 由上式知 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$, 不妨设 $A > 0$. 于是存在 x_0, 使当 $x \geqslant x_0$ 时
$$f(x) \geqslant \frac{A}{2},$$
从而 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散. 若 $A < 0$, 同理可证 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 矛盾. 因此 $A = 0$.

70. 证明: 广义积分
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$
与 α 值无关.

证
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

在第一个积分中做代换 $x = \frac{1}{y}$, 则有
$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})},$$
从而
$$I = I_1 + I_2 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{1+x^\alpha}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$
它与 α 无关.

71. 设广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛且等于 I. 证明: 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$ 也收敛并等于 I.

证 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{0}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{-\infty}^{0} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=I_1+I_2.$$
在每个积分中做变换 $x-\frac{1}{x}=t$, 得到

$$x=\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2},\ \text{当}\ x>0\ \text{时},$$
$$x=\frac{t-\sqrt{t^2+4}}{2},\ \text{当}\ x<0\ \text{时}.$$

于是

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt,$$
$$I_2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right)dt.$$

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt$ 也收敛. 由此得出 I_1 和 I_2 收敛, 并且

$$I_1+I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

72. 设 f 定义在 $[a,+\infty)$ 上, 给定 $\delta>0, t_0\geqslant a$, 令

$$\omega(f;t_0,\delta)=\sup_{t_1,t_2}\{|f(t_1)-f(t_2)|:t_1,t_2\geqslant t_0,|t_1-t_2|\leqslant\delta\}.$$

证明: 若积分 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ 收敛, 则 $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ 的充要条件是

$$\lim_{\substack{t_0\to+\infty\\ \delta\to0}}\omega(f;t_0,\delta)=0 \tag{1}$$

证 必要性: 设 $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $t_0(\varepsilon)\geqslant a$, 当 $t\geqslant t_0$ 时, $|f(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 对于 $t_1,t_2\geqslant t_0$, 有

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant|f(t_1)|+|f(t_2)|\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\substack{t_0\to+\infty\\ \delta\to0}}\omega(f;t_0,\delta)=0.$$

充分性: 设 (1) 式成立而 $\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ 不成立, 则存在递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_k\}$ 和正数 b, 使得或者 $f(a_k)\geqslant b$, 或者 $f(a_k)\leqslant -b$ $(k=1,2,\cdots)$, 不妨设 $f(a_k)\geqslant b$. 由于 $\omega\to0$, 故存在 δ 和 t_0, 使当 $t_1,t_2\geqslant t_0$ 且 $|t_1-t_2|\leqslant\delta$ 时, 就有

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant\frac{b}{2}. \tag{2}$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ 收敛, 故据 Cauchy 准则, 可取充分大的实数 $R \geqslant t_0$, 使对任何 $P > Q > R$, 有

$$\left|\int_Q^P f(t)dt\right| < b\delta. \tag{3}$$

取 k 充分大使 $a_k > R + \delta$, 由于 (2), 对于 $a_k - \delta \leqslant t \leqslant a_k + \delta$, 有 $f(t) \geqslant \frac{b}{2}$, 于是

$$\left|\int_{a_k-\delta}^{a_k+\delta} f(t)dt\right| \geqslant \frac{b}{2} \cdot 2\delta = b\delta,$$

这与 (3) 矛盾. 证毕.

注 若 f 连续, 则 (1) 等价于 $f(t)$ 在 $[a, +\infty]$ 上一致连续. 于是有

推论 若 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ 收敛, 则 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ 的充要条件是 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

问题 72 是由 Kelman 和 Rivlin[50] 得到的.

反 例

1. 函数 f, 使 $|f|$ 可积而 f 不可积.

在闭区间 $[0, 1]$ 上定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

则 $|f| \equiv 1$, 故 $|f|$ 在 $[0, 1]$ 上可积. 由于 f 无处连续, 因而它在 $[0, 1]$ 上不可积.

注 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

上述反例说明了这个陈述反过来是不成立的.

2. 没有原函数的可积函数.

设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

易见, f 在闭区间 $[-1, 1]$ 上可积. 然而, f 在 $[-1, 1]$ 上没有原函数. 事实上, 如果 f 在 $[-1, 1]$ 上有原函数 F, 即

$$F'(x) = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

那么, 由 Darboux 定理可知, F' 应取得 $F'(-1)=0$ 与 $F'(1)=1$ 之间的每一个值 (参看第三章问题 20), 即 f 应取得 $f(-1)=0$ 与 $f(1)=1$ 之间的每一个值. 此与 f 的定义相矛盾. 因此, f 在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

顺便指出, 由 Darboux 定理可知, 任何有跳跃间断点的函数都不可能有原函数.

3. 在任何区间上都没有原函数的可积函数.

设 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 为区间 $[0,1]$ 中的全体有理点, 令

$$f(x)=\sum_{r_k<x}\frac{1}{2^k},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则函数 f 在 $[0,1]$ 上严格递增, 且 f 在 $[0,1]$ 中的任一有理点间断而在任一无理点连续. 又, f 在点 r_n 处的跃度恰好等于 $\frac{1}{2^n}$, 即

$$\lim_{x\to r_n+0}f(x)-\lim_{x\to r_n-0}f(x)=\frac{1}{2^n}$$

(参看第二章反例 22). 因为 f 在 $[0,1]$ 上单调, 所以它在 $[0,1]$ 上可积. 但是, 由于 f 的跳跃间断点的集合在 $[0,1]$ 中稠密, 因而 f 在 $[0,1]$ 的任何子区间上都不可能有原函数.

4. 在闭区间上有原函数但不可积的函数.

设

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 f 在闭区间 $[-1,1]$ 的每一点 x 处都有 (有限) 导数

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此, 函数 g 有原函数 f. 但是, 由于 g 在区间 $[-1,1]$ 上无界, 因而它在 $[-1,1]$ 上并不可积.

5. 闭区间上具有原函数的有界函数而不可积.

本章反例 4 中做出的在闭区间上具有原函数而不可积的函数 g 是无界的, 于是便产生问题: 是否存在在闭区间上具有原函数的有界函数而不可积? 这个问题的答案是肯定的, Volterra 有例如下:

我们从闭区间 $[0,1]$ 中去掉其中间的长度为 $\frac{1}{4}$ 的开区间. 然后从剩下来的两个闭区间中各去掉其中间的长度为 $\frac{1}{4^2}$ 的开区间. 在第 n 步, 从第 $n-1$ 步剩下来的 2^{n-1} 个闭区间中各去掉其中间的长度为 $\frac{1}{4^n}$ 的开区间. 无限地继续这个过程, 我们从区间 $[0,1]$ 内去掉了一列总长度为

$$\frac{1}{4}+2\frac{1}{4^2}+\cdots+2^{n-1}\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{2}$$

的开区间, 剩下来的点形成闭集 E, 显然, E 不是零测度集. 设 d_n 表示第 n 步后剩下的各个闭区间的长度. 从这个构造方法, 显然, $d_{n+1} < \frac{d_n}{2}$; 因此 $n \to \infty$ 时 $d_n \to 0$. 这说明 $[0,1]$ 的子区间, 不管多么小, 都不能整个地含于集 E.

现在我们定义函数 f. 对 $x \in E$, 令 $f(x)=0$. 若 (α,β) 是去掉的开区间之一, 则紧接着 α 的右边定义

$$f(x)=(x-\alpha)^2\sin\frac{1}{x-\alpha},$$

紧接着 β 的左边定义

$$f(x)=(x-\beta)^2\sin\frac{1}{\beta-x},$$

直至达到最靠近 (α,β) 中间的极大值 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$; 在区间 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ 内, 规定 $f(x)$ 等于这个极大值.

这样, 我们在整个区间 $[0,1]$ 上定义了函数 f, 它是连续函数.

显然, f 在去掉的各个区间 (α,β) 内可微, 即使在 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ 处也是如此, 在这两个点的导数是 0. 对充分接近 α 的 $x(x>\alpha)$, 我们有

$$f'(x)=2(x-\alpha)\sin\frac{1}{x-\alpha}-\cos\frac{1}{x-\alpha};$$

若 $x\to\alpha$, 右端的第一项趋于 0, 而第二项在 $+1$ 与 -1 之间振动. 在 β 的左邻域内情况类似.

在点 α,β 处, 甚至在每个点 $x_0\in E$ 处, $f'(x_0)$ 都存在, 并且

$$f'(x_0)=0. \tag{1}$$

为证明这一点, 先设 $x>x_0$. 若 $x\in E$, 则

$$f(x)-f(x_0)=0-0=0;$$

若 x 存在于某个被去掉的区间 (α,β) 内, 则

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|\leqslant(x-\alpha)^2\leqslant(x-x_0)^2;$$

因此, 无论什么时候都有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant|x-x_0|.$$

$x<x_0$ 时仍然如此. 令 $x\to x_0$, 便得 (1).

这样, $f'(x)$ 处处存在, 但它在 E 上不连续. 事实上, 若 $x_0\in E$, 则在 x_0 的每个邻域内存在被去掉的区间的点, 因而也存在被去掉的区间之一的端点; 但我们知道: 在这样的端点处, 函数 f' 的振幅等于 2. 由于 E 不是零测度集, 因此, f' 不可能可积.

6. 以任意零测度的 F_σ 集作为间断点集的可积函数.

设 A 是一个给定的零测度的 F_σ 集, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 其中 A_n 是区间 $[a,b]$ 的闭子集, 且不妨设 $A_n\subset A_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$. 设 A_0 表示空集, 现在定义函数 f :

$$f(x)=\begin{cases}2^{-n}, & x\in A_n\backslash A_{n-1}\quad (n=1,2,\cdots),\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

兹证 f 在 A 上无处连续而在 $[a,b]\backslash A$ 上处处连续.

事实上, 任取 $x_0\in A$, 若 $x_0\in A_n\backslash A_{n-1}$, 则 $f(x_0)=2^{-n}$. 由于 $A_n\backslash A_{n-1}$ 是一个零测度集, 因而它不含有内点, 所以 x_0 必定是某个与 A_n 不相交的集的聚点. 在这个集上, f 的值与 $f(x_0)=2^{-n}$ 至少相差 2^{-n-1}, 这意味着 f 在 x_0 间断. 现任取 $x_0\in[a,b]\backslash A$, 则 $f(x_0)=0$. 对于任给的 $\varepsilon>0$, 我们选一个正整数 n_0 使 $2^{-n_0}<\varepsilon$, 然后再找 x_0 的一个邻域使其内部没有 $A_1,A_2,\cdots,A_{n_0}$ 的点, 于是, 当 x 属于 x_0 的这个邻域内时, 就有

$$|f(x)-f(x_0)|=f(x)<2^{-n_0}<\varepsilon,$$

这就是说, f 在 x_0 连续.

由于有界函数 f 在 $[a,b]$ 上的间断点集 A 是零测度集, 因而 f 在 $[a,b]$ 上可积.

7. 一个可积函数, 在某个可数集上改变它的值后, 就影响了它的可积性.

设 $f(x)\equiv 0, 0\leqslant x\leqslant 1$, A 是 $[0,1]$ 中的一切有理数所组成之集. 我们在集 A 上改变 f 的值处处为 1, 那么得到的函数在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而就不再可积了.

8. 一个可积函数, 在某个可数集上任意改变它的值 (但这些数值全体要组成有界集合), 而不影响它的可积性.

设 A 是由 0 和点 $x_n=\frac{1}{n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 组成的 $[0,1]$ 的一个可数子集, 在 $[0,1]$ 上定义函数 f :

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{-1}, & x\notin A,\\ 0, & x\in A.\end{cases}$$

易见, f 在 $[0,1]$ 上可积. 如果在 A 上改变 f 以任何数值, 但这些数值全体要组成有界集合, 那么得到的函数在 $[0,1]$ 上仍有界且几乎处处连续, 因而它在 $[0,1]$ 上仍可积.

注　对于一个可积函数, 变动它的有限个点的值, 可积性不变, 积分值也不变. 如果变动了它的可数个点的值, 那么可积性可能会遭到破坏 (参看本章反例 7). 另一方面, 反例 8 说明了也确实存在这样的可积函数, 在某个可数集上任意变动它的值 (要求这些数值全体组成有界集合) 而不影响它的可积性.

9. 关于复合函数可积性的例子.

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 且其值域不越出区间 $[c,d]$, 而 $g(y)$ 是定义在 $[c,d]$ 上的函数. 下面我们举出各种例子, 以说明函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上, $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上的可积性对于 $g[f(x)]$ 在 $[a,b]$ 上的可积性来说既非充分也非必要.

(a) 设 $f(x)$ 定义于 $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}, m \text{ 与 } n \text{ 是互素的整数, 且 } n>0, x\neq 0,\\ 0, & x \text{ 为无理数或 } x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 再设

$$g(y)=\begin{cases}1, & 0<y\leqslant 1,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

显然, $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上可积. 而复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上无处连续, 故它在 $[0,1]$ 上不可积.

(b) 设 $f(x)$ 定义于 $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x\neq 0 \text{ 且 } x=\dfrac{m}{n}, m \text{ 与 } n \text{ 是互素的整数, } n>0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

再设 $g(y)$ 定义于 $[0,1]$:

$$g(y)=\begin{cases}0, & y \text{ 为有理数},\\ 1, & y \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上不可积, 而复合函数在 $[0,1]$ 上

$$g[f(x)]\equiv 0$$

显然可积.

(c) 设在 $[0,1]$ 上, $f(x)=1-x$, 而在 $[0,1]$ 上

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为无理数},\\ 0, & y \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, $g(y)$ 在 $[0,1]$ 上不可积, 而复合函数在 $[0,1]$ 上:

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数},\\ 0, & x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

它显然不可积.

(d) 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 为:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

它显然不可积. 而在 $[0,1]$ 上定义函数 $g(y)$ 为:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & y\neq 0 \text{ 且 } y=\dfrac{m}{n}, m \text{ 和 } n \text{ 是互素的整数, 且 } n>0,\\ 0, & y \text{ 为无理数或 } y=0.\end{cases}$$

g 在 $[0,1]$ 上可积, 而复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x\neq 0 \text{ 且 } x=\dfrac{m}{n}, m \text{ 与 } n \text{ 是互素的整数}, n>0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积.

(e) 设 $f(x)$ 如 (d), 而在 $[0,1]$ 上 $g(y)=y^2$, 此时复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上不可积.

(f) 设在 $[0,1]$ 上定义 f 为:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数},\\ 0, & x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

而在 $[0,1]$ 上定义 $g(y)$ 为:

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为无理数},\\ 0, & y \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

它们在 $[0,1]$ 上均不可积, 而复合函数

$$g[f(x)]\equiv 0$$

在 $[0,1]$ 上可积.

(g) 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 为:

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x \text{ 为无理数},\\ x, & x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上不可积. 再在区间 $[2,3]$ 上定义 $g(y)$ 为:

$$g(y)=\begin{cases}1, & y \text{ 为无理数},\\ 0, & y \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

于是, 复合函数 $g[f(x)]$ 为:

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数},\\ 0, & x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

显然, $g(y)$ 与 $g[f(x)]$ 均不可积.

至于 $f(x)$ 和 $g(y)$ 均可积时, $g[f(x)]$ 为可积的例子是平凡的, 如取 $f(x)$ 及 $g(y)$ 均连续即可.

综上所述, 可列表如下 (表 4–1).

表 4–1

	$f(x)$ 在 $[a,b]$	$g(y)$ 在 $[c,d]$	$g[f(x)]$ 在 $[a,b]$	例
1	可　积	可　积	可　积	平凡
2	可　积	可　积	不可积	(a)
3	可　积	不可积	可　积	(b)
4	可　积	不可积	不可积	(c)
5	不可积	可　积	可　积	(d)
6	不可积	可　积	不可积	(e)
7	不可积	不可积	可　积	(f)
8	不可积	不可积	不可积	(g)

10. 存在可积函数 f 和连续函数 g, 构成不可积的复合函数 $f\circ g$.

设 A 为区间 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, $(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots)$ 为 A 的邻接区间. 在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 和 g 如下:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in A.\\ 1-\dfrac{1}{2}(b_i-a_i)+\left|x-\dfrac{1}{2}(a_i+b_i)\right|, & x\in(a_i,b_i), i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

则 f 在 $[0,1]$ 上可积, 而 g 在 $[0,1]$ 上连续, 这是因为对任何 $x_1,x_2\in[0,1]$, 都有

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|.$$

然而, 由于复合函数

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\backslash A\end{cases}$$

在 A 上无处连续, 而 $mA>0$, 因此, $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上并不可积.

注　这个例子中函数复合的顺序不能倒置. 换句话说, 如果 f 在有界闭区间 I 上连续, g 在 I 上可积, 那么 $f\circ g$ 在 I 上必定可积 (参看第四章问题 12).

11. 两个函数 f 与 g, 使 f^2 与 g^2 皆可积而 $(f+g)^2$ 并不可积.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 和 g:

$$f(x)=\begin{cases}\ \ 1, & x\text{ 为无理数},\\ -1, & x\text{ 为有理数},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\ \ 1, & x\text{ 为代数数},\\ -1, & x\text{ 为超越数}.\end{cases}$$

于是, $f^2\equiv 1, g^2\equiv 1$, 所以它们在区间 $[0,1]$ 上都是可积的. 但是,

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2, & x\text{ 既为代数数又为无理数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此, $(f+g)^2$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而它在 $[0,1]$ 上不可积.

12. 一个有界函数列的极限, 它在任何非空区间上都不可积.

设

$$\begin{aligned}g(x)&=\sin^2\pi x+\sin^2\pi x\cos^2\pi x+\sin^2\pi x\cos^4\pi x\\&\quad+\cdots+\sin^2\pi x\cos^{2k}\pi x+\cdots,\\ G(x)&=\lim_{n\to\infty}g(n!x).\end{aligned}$$

则当 x 是整数时, $g(x)=0$; 而当 x 不是整数时, $g(x)=1$. 因此, 若 x 是有理数, 则 $G(x)=0$; 若 x 是无理数, 则 $G(x)=1$. 可见 $G(x)$ 在任何区间上都不可积.

13. 一个收敛的单调且一致有界的连续函数列, 其极限函数不可积.

先对任何开区间 $I=(a,b)$, 其中 $0\leqslant a<b\leqslant 1$, 以及任何正整数 n, 定义函数 $g_{n,I}$:

$$g_{n,I}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ 1, & b\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & a+\dfrac{b-a}{2^n}\leqslant x\leqslant b-\dfrac{b-a}{2^n},\\ \text{线性}, & a\leqslant x\leqslant a+\dfrac{b-a}{2^n},\\ \text{线性}, & b-\dfrac{b-a}{2^n}\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

设 A 是区间 $[0,1]$ 中具有正测度的 Cantor 集, f_A 是 A 的特征函数, 即

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\in[0,1]\backslash A.\end{cases}$$

$\{J_n\}$ 是 A 的邻接区间, 在 $[0,1]$ 上定义函数列 $\{f_n\}$ 如下:

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = g_{1,J_1}(x),\\
&f_2(x) = g_{2,J_1}(x)g_{2,J_2}(x),\\
&\cdots\cdots\\
&f_n(x) = g_{n,J_1}(x)g_{n,J_2}(x)\cdots g_{n,J_n}(x).
\end{aligned}$$

不难证明, $f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 一致有界, $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$, 且对每一 $x \in [0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_A(x).$$

另一方面, 由于 f_A 的间断点所组成之集是 A, 而该集具有正测度, 因而 f_A 在 $[0,1]$ 上不可积.

14. 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

在闭区间 $[0,1]$ 上如下定义函数列:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{n},\\ 0, & x = 0 \text{ 或 } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

易见, 对每一正整数 n, f_n 在 $[0,1]$ 上都是可积的, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

但是,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

更为极端的例子是

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n},\\ n^2 - 2n^3\left(x - \dfrac{1}{2n}\right), & \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

此时, 对任何 $b \in (0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2} = \infty,$$

而

$$\int_0^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^b 0dx = 0.$$

15. 一个可积函数 f, 使 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 处处可微, 但在一个稠密集上, $g'(x) \neq f(x)$.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数, 且 } q > 0, \\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的其他点}. \end{cases}$$

则 f 在 $[0,1]$ 上可积, 且

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \equiv 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

因此, 对任意 $x \in [0,1]$, 都有 $g'(x) = 0$, 从而在 $[0,1]$ 中的每个有理点上, $g'(x) \neq f(x)$.

16. 一个可积函数 f, 使 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 不处处可微.

设 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, 则 f 仅在 $x = 0$ 处不连续, 故它在任何有限区间上都是可积的.

又,

$$g(x) = \int_0^x \operatorname{sgn} t dt = |x|,$$

故 g 在 $x = 0$ 处不可微.

注　我们有如下的结论: 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可积, 而

$$g(x) = C + \int_0^x f(t)dt$$

为 f 的不定积分, 则 g 在 $[a,b]$ 上连续且在 f 连续的一切点处等式

$$g'(x) = f(x)$$

成立. 本章反例 15 与反例 16 说明了在函数 f 的间断点处, g 可能可微也可能不可微.

17. 存在函数 f 和 g, 使得 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 在 $[a,b]$ 上不变号且可积, 而在 (a,b) 中不存在满足等式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \tag{1}$$

的 ξ.

设 $g(x) \equiv 1$, 再设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ -1, & -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} g(x)dx = 2.$$

于是, 由函数 f 的定义可知, 不存在 $\xi \in (-1,1)$, 使

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x)dx.$$

注 我们有如下的积分第一中值定理: 若 f 在 $[a,b]$ 上连续, g 在 $[a,b]$ 上不变号, 且在 $[a,b]$ 上可积, 则在 (a,b) 中存在一点 ξ, 使

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_{a}^{b} g(x)dx.$$

上述反例说明了 f 在区间 $[a,b]$ 上不连续时, 等式 (1) 未必成立.

18. $(0,1)$ 上的一个无界函数, 其广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不是对应的积分和数 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

考察定义在开区间 $(0,1)$ 上的函数 $f(x) = |\ln x|$, 它在 $(0,1)$ 上的广义积分收敛, 因为

$$\int_{0}^{1} |\ln x|dx = -\int_{0}^{1} \ln x dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{1} \ln x dx = 1.$$

然而, 若将 $(0,1)$ 分成长度相等的 n 个子区间:

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1,2,\cdots,n-1),$$

并取 $\xi_0' = e^{-n}, x_i \leqslant \xi_i' \leqslant x_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots,n-1)$, 则显然有 $0 < \xi_0' < \frac{1}{n}$.

再取 $\xi_0'' = e^{-2n}$, 以及 $x_i \leqslant \xi_i'' \leqslant x_{i+1}$ $(i = 1,2,\cdots,n-1)$, 同样有 $0 < \xi_0'' < \frac{1}{n}$.

如果 $\int_0^1 |\ln x|dx$ 是和数 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限, 则应有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i'')\Delta x_i.$$

然而, 上述等式两端的和数中有一项相异:

$$f(\xi_0')\Delta x_0 = \frac{1}{n}|\ln e^{-n}| = 1,$$

$$f(\xi_0'')\Delta x_0 = \frac{1}{n}|\ln e^{-2n}| = 2.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i')\Delta x_i \neq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i'')\Delta x_i.$$

由此可见, 广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 不能是对应的积分和数 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限.

19. $(0,1)$ 内的一个单调函数 f, 使 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在而 f 并不广义可积.

在开区间 $(0,1)$ 上定义函数

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x},$$

则

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{x}{(1-x)^2}<0,$$

故 f 在 $(0,1)$ 内是严格递减的, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-2k}{k(n-k)}=0.$$

然而, f 在 $(0,1)$ 上并不广义可积.

注 如果函数 f 在开区间 $(0,1)$ 内单调, 它在点 $x=0,x=1$ 的附近不必有界, 那么由广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的收敛性推知极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 必定存在, 且有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

(参看第四章问题 67). 上述反例说明了它的逆命题并不成立. 又, 如果 f 在开区间 $(0,1)$ 内单调, 在 $x=0$ 或 $x=1$ 为有限, 并且下列极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

也为有限, 那么广义积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 必定收敛. 因此, 上述反例也说明了在这个命题中, f 在 $x=0$ 或 $x=1$ 为有限的条件是不能去掉的.

20. 收敛而不绝对收敛的广义积分.

收敛而不绝对收敛的广义积分的典型例子是

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

要证明 $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛, 对于任意的 $s>\pi$, 我们有

$$\int_\pi^s\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{1}{\pi}-\frac{\cos s}{s}-\int_\pi^s\frac{\cos x}{x^2}dx, \tag{1}$$

$$\frac{|\cos x|}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}\quad(\pi\leqslant x<+\infty),$$

而 $\int_\pi^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛, 故 $\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 绝对收敛, 因而收敛. 因此, 当 $s\to+\infty$ 时, (1) 式右端各项趋于有限极限. 所以

$$\lim_{s\to+\infty}\int_\pi^s\frac{\sin x}{x}dx$$

存在, 这就证明了 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

兹证广义积分 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 并不绝对收敛. 事实上, 对于任意正整数 p, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{p\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx &= \sum_{n=1}^{p-1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\\ &\geqslant \sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|dx\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi}|\sin(u+n\pi)|du.\end{aligned}$$

现在, $\sin(u+n\pi)=\sin u\cos n\pi$, 而 $\cos n\pi=\pm1$, 故 $|\sin(u+n\pi)|=|\sin u|$. 因此, 若 $0\leqslant u\leqslant\pi$, 则 $|\sin(u+n\pi)|=\sin u$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{p\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx &\geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+1}\int_{0}^{\pi}\sin u du\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{1}{n+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{p}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

因级数 $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散, 故 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ 也发散, 即 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 并不绝对收敛.

21. 存在函数 f 和 g, 使 f 广义可积而 g 有界, 但 fg 并不广义可积.

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}, g(x)=\sin x$, 则 f 在区间 $[\pi,+\infty)$ 上是广义可积的, 即广义积分

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛 (参看本章反例 20). 但是, 广义积分

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

发散. 事实上,

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

而对任意 $s>\pi$, 有

$$\left|\int_{\pi}^{s}\cos 2xdx\right|=\frac{1}{2}|\sin 2s-\sin 2\pi|\leqslant\frac{1}{2},$$

又当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{2x}$ 单调地趋于零, 因而由 Dirichlet 判别法可知广义积分

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$$

收敛. 另外, $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$ 发散, 所以 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 也发散.

注 容易证明, 如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛, 函数 g 在 $[a,+\infty)$ 上有界, 那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 也绝对收敛. 上述反例说明了在这个命题中, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛的条件是不能去掉的.

22. 存在函数 f, 它在 $(0,+\infty)$ 的任何有界子区间上均可积, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 但 $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散.

考察函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则 f 在 $(0,+\infty)$ 的任何有界子区间上均可积, 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛. 但 $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ 发散.

注 对于区域 D 上的二元函数 $f(x,y)$ 而言, 我们有如下的定理: 若 $f(x,y)$ 在 D 的任何有界子区域上均可积, 则积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

收敛的充要条件是该积分是绝对收敛的, 也就是说, 广义二重积分是一种绝对收敛积分 (参看 [43], p. 223–225). 上述反例表明对于一元函数而言, 相应的命题并不成立.

23. 存在 $[1,+\infty)$ 上的连续函数 f 和 h, 满足

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1, \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛},$$

而 $\int_1^{+\infty} h(x)f(x)dx$ 却发散.

在区间 $[1,+\infty)$ 上定义函数

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad h(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sin x},$$

则 f 和 h 在 $[1,+\infty)$ 上均连续, 且

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1, \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

令

$$g(x)=h(x)f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}.$$

兹证 $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ 发散. 事实上,

$$g(x)=f(x)-\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sin x)}=f(x)-H(x).$$

由比较判别法, $\int_1^{+\infty} H(x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ 的敛散性相同, 而后者是发散的, 故由 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的收敛性知 $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ 是发散的.

24. 存在函数 f, 使 $|f|$ 广义可积而 f^2 并不广义可积.

第一例 (无界函数的情形). 设 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqslant 1)$, 则

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2,$$

但 $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ 发散.

第二例 (无界区间的情形). 在区间 $[1, +\infty)$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x) = \begin{cases} n^2, & n \leqslant x < n + \dfrac{1}{n^4}, n = 1, 2, \cdots, \\ 0, & n + \dfrac{1}{n^4} \leqslant x < n + 1, n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

显然,

$$\int_1^{k+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{k} n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}.$$

当 $k \to +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 因而广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 是收敛的. 但是,

$$\int_1^{k+1} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{k} n^4 \cdot \frac{1}{n^4} = k,$$

所以

$$\lim_{k \to +\infty} \int_1^{k+1} f^2(x)dx = +\infty,$$

即广义积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 是发散的.

注 容易证明, 若 f 和 g 在 $[a, b]$ 上可积, 则 fg 在 $[a, b]$ 上亦必可积. 上述反例说明了对于广义积分而言, 相应的命题并不成立.

25. $[1, +\infty)$ 上的一个函数 f, 使 f^2 广义可积而 $|f|$ 并不广义可积.

设 $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}, 1 \leqslant x < +\infty$, 则

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^{\frac{3}{4}})^2}dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = 2.$$

但广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}dx$ 发散.

注 本章反例 24 中的第二例和反例 25 说明了对于无穷限广义积分, 平方可积与绝对可积是互不蕴涵的. 对于有界区间上的无界函数的广义积分, 平方可积的函数一定是绝对可积的, 这可由不等式

$$|f(x)| \leqslant \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

得到. 本章反例 24 中的第一例说明了它的逆命题并不成立.

26. 在 $[1,+\infty)$ 上广义可积的正值连续函数 f, 使 $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

在各个整数 $n>1$, 令 $g(n)=1$, 在闭区间 $[n-n^{-2},n]$ 和 $[n,n+n^{-2}]$ 的内部, 定义 g 是线性的, 而在区间的非整数端点, g 取 0. 最后, 在 $x\geqslant 1$ 而 g 尚未定义的点, 规定 $g(x)$ 的值为 0. 于是, 函数

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{x^2}$$

当 $x\geqslant 1$ 时是正值连续函数, 且

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^{+\infty} g(x)dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+1<+\infty,\end{aligned}$$

即 f 在 $[1,+\infty)$ 上广义可积. 但是, 等式

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

并不成立.

注　可以证明, 如果 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 那么

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

(参看第四章问题 63). 上述反例说明了在这个命题中一致连续性不能代以正值连续性.

第五章　级　　数

基本概念和主要结果

本章所考虑的数项级数都假定为**实级数**, 即由实数项组成的无穷级数. 对于数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, 令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称 s_n 为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的n **部分和** (简称**部分和**). 若 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ 存在, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为**收敛**的, 并称 s 为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的**和**, 记作

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

在相反的情形, 就称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为**发散**的.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Cauchy 准则　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$, 使对一切满足条件 $m > n \geqslant n_0$ 的 m 和 n, 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 c 为任意实数;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 叫作**非负**的或**正项**的, 是指对于每个 k, 分别有 $a_k \geqslant 0$ 或 $a_k > 0$. 就非负级数而言, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ 意味着级数收敛; 而 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ 意味着级数发散.

比较原理 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是正项级数. (i) 若对一切 $k \in N$, 有 $a_k \leqslant b_k$, 则从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (ii) 若对一切 $k \in N$, 有 $a_k \geqslant b_k$, 则从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

积分判别法 设 f 是 $[1, +\infty)$ 上的正值递减函数, 且 $a_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是: $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$ 存在.

D'Alember 判别法 (也称**比检法**) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; 当 $\rho > 1$ (包括 $\rho = +\infty$) 时级数发散; $\rho = 1$ 时不能判定.

Cauchy 判别法 (也称**根检法**) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, 则 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ 时级数发散; $\rho = 1$ 时不能判定.

凡正负项相间的级数, 也就是形如

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots \quad (a_n > 0; n = 1, 2, \cdots)$$

的级数, 称为**交错级数.**

对于交错级数, 有下面的简单定理.

Leibniz 定理 如果一个交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 的项满足 (i) 单调减少, 即 $a_{n+1} \leqslant a_n (n = 1, 2, \cdots)$, (ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛.

Abel 变换 设 α_i, β_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是两组数, 令

$$A_p = \sum_{i=1}^{p} a_i \quad (p = 1, 2, \cdots, m)$$

则

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = A_m \beta_m + \sum_{i=1}^{m-1} A_i (\beta_i - \beta_{i+1}).$$

Abel 引理 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m > 0, u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是一组实数. 令

$$s_p = \sum_{i=1}^{p} u_i, |s_p| \leqslant M \quad (p = 1, 2, \cdots, m),$$

则有 $|\sum_{k=1}^{m} a_k u_k| \leqslant M a_1$.

Abel 判别法 若 (i) $\{b_n\}$ 是递减的正数数列, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的级数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 是收敛的.

Dirichlet 判别法 若 (i) $\{b_n\}$ 是递减数列, 且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, (ii) 存在 M, 使

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 是收敛的.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 称为**绝对收敛**的, 是指级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛. 显然, 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是**条件收敛**的.

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的级数称为**函数项级数**, 这里级数的项 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是某个变量的函数. 使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的 x 值的全体所组成之集叫作此级数的**收敛域**, 而称函数

$$s(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和**, 其中 x 属于这个级数的收敛域.

若函数 f 在 x_0 有各阶有限导数, 我们称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 点的 **Taylor 级数**. 在实际应用中, 为了简单起见, 往往取 $x_0=0$, 这时的 Taylor 级数

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

称为 **Maclaurin 级数**.

应当注意的是, 一个函数的 Taylor 级数并不一定收敛, 并且即使收敛也不一定收敛于这个函数.

有关级数的更多的材料, 可参看 [5] 或 [6].

问　　题

1. 设 $\{a_n\}$ 是一个正数列. 证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1,$$

而且此不等式右端的数字 1 不可能被任何较大的数字所代替.

证 (反证法) 假设结论不真, 那么存在正整数 n_0, 使 $n\geqslant n_0$ 时

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1.$$

此不等式等价于

$$\frac{1}{n+1}<\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}.$$

将 n 依次用 $n_0, n_0+1,\cdots,n_0+k-1$ 代入且将结果相加得

$$\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{n_0+k}<\frac{a_{n_0}}{n_0}-\frac{a_{n_0+k}}{n_0+k}<\frac{a_{n_0}}{n_0},$$

这与调和级数发散性相矛盾.

为证 1 不可能被较大的数字所代替, 可取 $a_n = kn\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则有

$$n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \frac{1 + k}{k}.$$

此式对大的 k 可以任意接近于 1. 若取 $a_n = n \ln n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 1.$$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是递减的正项发散级数, 证明当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}} \to 1.$$

证 把分子与分母分别记为 A 与 B, 显然 $A \geqslant B$ 且

$$A - a_1 = a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} \leqslant B.$$

又

$$2B \geqslant B + A - a_1 = \sum_{k=2}^{n} a_k \to \infty \quad (n \to \infty),$$

故

$$\left|\frac{A}{B} - 1\right| = \frac{|A - B|}{B} \leqslant \frac{\alpha_1}{B} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因此, $\frac{A}{B} \to 1\ (n \to \infty)$.

3. 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 令

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad r_n = \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}.$$

已知 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 与 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 均存在, 证明 $\lim_{n\to\infty} s_n \lim_{n\to\infty} r_n \geqslant 1$.

证 因 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 与 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 均存在, 故 $\lim_{n\to\infty} s_n r_n$ 也存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} s_n r_n = \lim_{n\to\infty} s_n \lim_{n\to\infty} r_n.$$

乘积 $n^2 r_n s_n$ 等于 n 个 1 加上由 $i \neq j$ 的所有对 (i, j) 形成的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对形如 $a_i a_j^{-1} + a_j a_i^{-1}$ 的项. 因对一切正数 x, 都有

$$x + x^{-1} \geqslant 2,$$

故知 $n^2 r_n s_n \geqslant n + n(n-1) = n^2$. 因此, 对一切 $n, r_n s_n \geqslant 1$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} r_n \lim_{n\to\infty} s_n = \lim s_n r_n \geqslant 1.$$

4. 设 $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 证明数列 $\{(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n)\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时敛散.

证 因数列 $\{(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n)\}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 具有相同的敛散性, 故只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时敛散即可. 由于当 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1,$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时敛散.

5. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛.

证 令 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$.
当 $n < 2^k$ 时

$$\begin{aligned} s_n &\leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k; \end{aligned}$$

当 $n > 2^k$ 时

$$\begin{aligned} s_n &\geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k. \end{aligned}$$

因此数列 $\{s_n\}$ 和 $\{t_k\}$ 同时有界或同时无界, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 同时收敛或同时发散.

6. 设给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 证明: 若 $a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \rho,$$

则当 $\rho < \frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\rho > \frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; $\rho = \frac{1}{2}$ 时不能判定.

证 当 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \rho < \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_{2n}}{a_n} = 2\rho < 1.$$

取 $n = 2^k, k$ 为正整数, 则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2a_{2\cdot 2^k}}{a_{2^k}} = 2\rho < 1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}a_{2^{k+1}}}{2^k a_{2^k}} = 2\rho < 1,$$

故由比值判别法知 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛, 再由本章问题 5 知 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

同理可证当 $\rho > \frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 至于 $\rho = \frac{1}{2}$ 时失效, 只要举两个例子就够了. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$, 二者均有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2}$, 但前者发散而后者却收敛.

注 这个问题是由刘秋生 [7] 得到的, 他还证明, 凡是能用比值判别法判定的满足条件 $a_{n+1} \leqslant a_n$ 的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 都可以用问题 6 的方法判定, 反之并不成立. 因此, 对于满足 $a_{n+1} \leqslant a_n$ 的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 问题 6 的方法较比值判别法更为广泛. 事实上, 可以证明, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = 0.$$

证 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 使当 $n > n_0$ 时恒有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \varepsilon.$$

同时有

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \rho + \varepsilon, \quad \cdots, \quad \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} < \rho + \varepsilon.$$

把它们乘起来得

$$\frac{a_{2n}}{a_n} < (\rho + \varepsilon)^n.$$

由于 $\rho + \varepsilon$ 仍可小于 1, 故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = 0.$$

同理可证, 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho > 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = +\infty.$$

由此可见, 在满足条件 $a_{n+1} \leqslant a_n$ 下的正项级数, 凡用比值判别法判断的都可用问题 6 的方法去判断, 其逆不真. 例如, 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n},$$

这里 $a_n > a_{n+1}$, 即 $\frac{n^n}{n!e^n} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}$, 后一不等式可以从 $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 直接推出, 而且有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!e^{2n}} \cdot \frac{n!e^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n}e^n}{n^n e^{2n}} \cdot \frac{n!}{(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^{2n}e^n}{n^n e^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}e^{-2n}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!e^n}$ 发散. 但对此级数, 比值判别法就无法判断其敛散性.

周肇锡 [13] 在刘秋生工作的基础上, 得到了关于判别正项级数敛散性的更为精细的方法, 读者如有兴趣, 可参看作者的原文.

7. 设 $a_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a\ (a\neq 0)$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ 同时敛散.

证　设

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|,\tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|.\tag{2}$$

显然, (1) 与 (2) 均为正项级数, 且

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}-a_n|}{\left|\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}a_n|\\&=a^2\neq 0.\end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同时敛散, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ 同时敛散.

8. 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

证　任给 $\varepsilon>0$, 由题设及 Cauchy 收敛准则知存在 N_1, 当 $m>n\geqslant N_1$ 时

$$\sum_{k=n+1}^{m}a_k<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $a_{n+1}\leqslant a_n$, 故

$$(m-n)a_m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 故存在 N_2, 当 $n>N_2$ 时

$$a_n<\frac{\varepsilon}{2N_1}.$$

取 $n_0=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>n_0$ 时

$$0\leqslant na_n=N_1a_n+(n-N_1)a_n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

9. 根据任何正整数 n 能够表达成 $n=2^k(2l+1)$ 的形式, 证明: 若 $a_n=e^{-k},b_n=a_1a_2\cdots a_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证 因任何正整数 n 可表为

$$n = 2^k(2l+1)$$

的形式, 其中 k 和 l 是非负整数, 故当 n 是奇数时, $k=0$; 当 n 是偶数时, k 是一个正整数. 因此, 当 n 是奇数时, $a_n = 1$; 当 n 是偶数时, $a_n \leqslant e^{-1}$. 于是, $b_{2n} = b_{2n+1}$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + 2b_2 + 2b_4 + \cdots.$$

因

$$\frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = a_{2n+1}a_{2n+2} \leqslant e^{-1},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的.

10. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛. 反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 问: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否也收敛? 又若 $\{a_n\}$ 是单调的, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 问: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

解 因 $(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}})^2 = a_n - 2\sqrt{a_n a_{n+1}} + a_{n+1} \geqslant 0$, 故

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}).$$

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛.

反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 未必收敛. 例如, 取 $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = \frac{1}{n^4} (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

若 $\{a_n\}$ 单调减少, 即 $a_n \geqslant a_{n+1}$, 则

$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \geqslant a_{n+1},$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛. 若 $\{a_n\}$ 单调增加, 即 $a_n \leqslant a_{n+1}$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 这时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

11. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, s_n 表示它的前 n 项之和. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 也发散.

证 由于 $a_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 故对任意给定的正整数 n, 只要 m 足够大便有 $\frac{s_n}{s_m} < \frac{1}{2}$.

又

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{s_k}\right| &= \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \cdots + \frac{a_m}{s_m} > \frac{a_{n+1} + \cdots + a_m}{s_m} \\ &= \frac{s_m - s_n}{s_m} = 1 - \frac{s_n}{s_m} > \frac{1}{2},\end{aligned}$$

故由 Cauchy 准则得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 发散.

12. 设 $\{a_n\}$ 是正的单调递增数列. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 当 $\{a_n\}$ 有界时收敛, 而当 $\{a_n\}$ 无界时发散.

证 若 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在, 故

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_1} = \frac{a_{n+1}-a_1}{a_1} \to \frac{a-a_1}{a_1} \quad (n\to\infty),$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_1}$ 收敛. 而

$$0 < 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1},$$

故由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.

若 $\{a_n\}$ 无界, 则当 $n\to\infty$ 时 $a_n \to +\infty$.
由于

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+p}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right) &= \sum_{k=n}^{n+p}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}} > \sum_{k=n}^{n+p}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{n+p+1}} \\ &= \frac{a_{n+p+1}-a_n}{a_{n+p+1}} = 1 - \frac{a_n}{a_{n+p+1}},\end{aligned}$$

因而不论 n 有多大, 总可选取充分大的 p 使得 $\frac{a_n}{a_{n+p+1}} < \frac{1}{2}$, 于是

$$\sum_{k=n}^{n+p}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right) > \frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 准则, 便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 发散.

13. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足下述条件: (i) $\{\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_n)\}$ 对 n 有界; (ii) $\{a_n\}$ 单调递减且趋于 0. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证 由所给条件, 存在正数 M 使得对一切正整数 n 都有

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_n) \leqslant M. \tag{1}$$

任取正整数 m, 设 $n > m$, 则有

$$\begin{aligned} M &\geqslant a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n - na_n \\ &= a_1 + \cdots + a_m - ma_n + a_{m+1} + \cdots + a_n - (n-m)a_n \\ &\geqslant a_1 + \cdots + a_m - ma_n \\ &\geqslant ma_m - ma_n \geqslant 0, \end{aligned}$$

即

$$0 \leqslant m(a_m - a_n) \leqslant M \quad (n > m, m = 1, 2, \cdots).$$

令 $n \to \infty$ 得 $ma_m \leqslant M$ $(m = 1, 2, \cdots)$, 代入 (1) 式便得

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant 2M \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因此, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

14. 设数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0, 且

$$b_k = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

证明 $\sum_{k=1}^{\infty} kb_k = a_1$.

证 由 (1) 得 $a_k - a_{k+1} \geqslant a_{k+1} - a_{k+2} \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 令

$$c_k = a_k - a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{c_k\}$ 单调递减趋于 0. 显然, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ 收敛, 因此当 $k \to \infty$ 时 $kc_k \to 0$ (参看本章问题 8), 即

$$\lim_{n \to \infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0. \tag{2}$$

由于

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kb_k &= \sum_{k=1}^{n} k[(a_k - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_{k+2})] \\
&= \sum_{k=1}^{n} [k(a_k - a_{k+1}) - (k+1)(a_{k+1} - a_{k+2})] + \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_{k+2}) \\
&= a_1 - a_2 - (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}) + a_2 - a_{n+2} \\
&= a_1 - a_{n+2} - (n+1)(a_{n+1} - a_{n+2}).
\end{aligned}$$

因此由 (2) 得到 $\sum_{k=1}^{\infty} kb_k = a_1$.

15. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 是满足

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}^2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

的数列. 证明: 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $a_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

证 显然有 $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 若 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 则存在 $k \geqslant 1$, 使 $\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j < 1$, 从而

$$a_{k+1} \leqslant a_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^2 \leqslant a_{k+1} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \right) \leqslant a_{k+1}.$$

因此, $a_k = a_{k+1}$, 故 $a_{k+1} = 0$, 这表明对 $j > k$, 均有 $a_j = 0$. 因

$$a_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^2,$$

故推知当 $j < k+1$ 时亦有 $a_j = 0$.

16. 设 $a_n > 0$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

是收敛的.

证　因为

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

而 $a_n > 0$, 故数列 $\{\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}\}$ 单调递减且有下界, 因而收敛. 由此可知, 原级数也收敛.

17. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格单调递减. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

证　显然, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 且 $a_n > a_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 又

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} < \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}} = \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 - a_{k+1}^2) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1}), \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1})} = +\infty.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

18. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的所有子级数都收敛. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

证 令

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n^-)$ 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一切正项与一切负项做成的子级数. 根据假设, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n^-)$ 均收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$ 收敛.

19. 设 $a_n > 0, a_n > a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

是收敛的.

证 因为

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - na_{n+1}}{n(n+1)} \\ &= \frac{(a_1-a_{n+1})+(a_2-a_{n+1})+\cdots+(a_n-a_{n+1})}{n(n+1)} > 0,\end{aligned}$$

所以 $\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$ 是单调递减数列. 又因 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0.$$

因此, 由 Leibniz 判别法知原级数是收敛的.

20. (Abel 引理) 设 $\{a_n\}$ 是实数列, 其部分和 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 满足 $m \leqslant s_n \leqslant M(n \in N, m, M$ 是实数), 又 $\{b_n\}$ 是满足 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ 的数列. 证明: 对 $n \in N$ 有

$$mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Mb_1.$$

证 易知

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) - s_n b_{n+1}.$$

因 $b_k - b_{k+1} \geqslant 0, s_k \leqslant M$, 故

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant M\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) + Mb_{n+1} = Mb_1.$$

类似地可证 $mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

21. 证明无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是对每个正整数列 $\{p_n\}$, 有

$$t_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p_n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

证　必要性: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 当 $n > n_0$ 时对所有 p, 有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

从而当 $n > n_0$ 时有

$$|t_n| < \varepsilon.$$

充分性: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在某个正数 ε_0, 对任何正整数 n_0, 存在 $n > n_0$ 及 p, 使

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \geqslant \varepsilon_0.$$

由于 n_0 是任取的, 因而存在正整数列 $\{p_n\}$, 使对应的数列 $\{t_n\}$ 不收敛于 0, 矛盾.

22. 设 s_n 是无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和, 再设数列 $\{b_n\}$ 满足条件:

(i) 数列 $\{s_n b_{n+1}\}$ 收敛,

(ii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n+1})$ 收敛.

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证　因为

$$t_n = \sum_{k=n+1}^{n+p_n} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p_n} s_k(b_k - b_{k+1}) - (s_n b_{n+1} - s_{n+p_n} b_{n+p_n+1}).$$

对于每一个所取的正整数 p_n, 利用题设和本章问题 21, 有

$$t_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

23. 分别在下列情况中, 证明本章问题 22 的条件是成立的:

(i) $b_n > b_{n+1}\ (n = 1, 2, \cdots), b_n \to 0\ (n \to \infty)$, $\{s_n\}$ 是有界的.

(ii) $b_n > b_{n+1} > \alpha\ (n = 1, 2, \cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(iii) $b_n \to 0\ (n \to \infty), \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+1} - b_n|$ 收敛, 且 $\{s_n\}$ 是有界的.

证　(i) 因 $\{s_n\}$ 有界且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 故

$$s_n b_{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

又由于

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 是收敛的. 而 $b_n>b_{n+1}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 是绝对收敛的, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n(b_n-b_{n+1})$ 是收敛的.

(ii) 因 $b_n>b_{n+1}>\alpha$, 故 $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha_0$ 存在且 $\alpha_0\geqslant\alpha$. 而 $\{s_n\}$ 收敛, 故 $\{s_nb_{n+1}\}$ 也收敛. 又由于

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})=b_1-b_{n+1}\to b_1-\alpha_0\quad(n\to\infty),$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n(b_n-b_{n+1})$ 是收敛的.

(iii) 由题设知 $s_nb_{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$. 再利用在 (i), (ii) 情形中的论证知 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n(b_n-b_{n+1})$ 是收敛的.

因此, 如果满足上述三个条件中的一个, 那么本章问题 22 的条件都是成立的.

24. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛, 且 $\lim_{n\to\infty}na_n$ 存在. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 设 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1})=s, \lim_{n\to\infty}na_n=l$, 因 $\sum_{k=0}^{n-1}a_k$ 可记作

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_k=na_n-\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k-1}),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}a_k=l-s.$$

即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

25. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛.

证 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 故据 Cauchy 准则, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0, 使当 $n>n_0$ 及任意正整数 p, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

又因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 绝对收敛, 故存在正整数 n_0', 使当 $n>n_0'$ 及任意正整数 p, 有

$$\sum_{k=n}^{n+p}|b_{k+1}-b_k|<\varepsilon.$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 收敛, 故其部分和数列 $\{\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)\}$ 收敛, 即 $\{b_n\}$ 收敛. 因此, 存在 M 而有

$$|b_n|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots).$$

据 Abel 变换, 当 $n > \max\{n_0, n_0'\}$ 时, 对任何正整数 p, 有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_n b_n\right| &= \left|(b_n - b_{n+1})a_n + (b_{n+1} - b_{n+2})\sum_{k=n}^{n+1} a_k\right. \\
&\quad \left. + \cdots + (b_{n+p-1} - b_{n+p})\sum_{k=n}^{n+p-1} a_k + b_{n+p}\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \\
&\leqslant |b_n - b_{n+1}| \cdot |a_n| + |b_{n+1} - b_{n+2}| \cdot \left|\sum_{k=n}^{n+1} a_k\right| \\
&\quad + \cdots + |b_{n+p-1} - b_{n+p}| \cdot \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} a_k\right| + |b_{n+p}| \cdot \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| \\
&\leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+p-1} |b_{k+1} - b_k|\right)\varepsilon + M\varepsilon \leqslant \varepsilon^2 + M\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此, 据 Cauchy 准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

26. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 收敛, 证明级数

$$t_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} + \cdots + k a_{n+k-1} + \cdots \tag{1}$$

也收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

证　令 $s_n = n a_n + (n+1)a_{n+1} + \cdots + (n+m)a_{n+m} + \cdots$, 则 $s_n - s_{n+1} = n a_n$, 即 $a_n = \frac{s_n - s_{n+1}}{n}$.

由 Abel 变换得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n_0}(k+1)a_{n+k} &= \sum_{k=0}^{n_0} \frac{k+1}{k+n}(s_{n+k} - s_{n+k+1}) \\
&= \frac{s_n}{n} - \frac{n_0+1}{n_0+n} s_{n+n_0+1} + \sum_{k=1}^{n_0}\left(\frac{k+1}{n+k} - \frac{k}{n+k-1}\right) s_{n+k}.
\end{aligned}$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. 又

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{n+k} - \frac{k}{n+k-1}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

故级数 (1) 收敛, 且有

$$t_n = \frac{s_n}{n} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+k} - \frac{k}{n+k-1}\right) s_{n+k}.$$

显然, $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

27. 讨论级数

$$\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\cdots$$

的绝对收敛与条件收敛性.

解 (i) 若 $p>1,q>1$, 则

$$|a_n|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{n^p}, & p\leqslant q,\\[2mm] \dfrac{1}{n^q}, & p>q.\end{cases}$$

其中 a_n 代表上述级数的第 n 项. 由比较判别法知, 此时所论级数绝对收敛.

(ii) 若 $p\leqslant 0,q\leqslant 0$, 则所论级数发散.

(iii) 若 $0<p\leqslant 1,q>1$ (或 $p>1,0<q\leqslant 1$), 仅以 $0<p\leqslant 1,q>1$ 为例: 考察级数

$$\left(\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}\right)+\cdots. \tag{1}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^q}$ 收敛, 故级数 (1) 发散, 从而所论级数发散.

(iv) 若 $0<p<q\leqslant 1$, 考察级数

$$\left(\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right)+\cdots. \tag{2}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}}{\dfrac{1}{(2n-1)^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{(2n-1)^p}{(2n)^q}\right)=1,$$

故正项级数 (2) 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 同时收敛或同时发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^p}$ 发散, 故知级数 (2) 也发散, 从而所设级数发散.

用类似的方法可证明 $0<q\leqslant p\leqslant 1$ 时, 所论级数发散.

(v) 若 $0<p=q\leqslant 1$, 则所论级数条件收敛.

综上所述, 当 $p>1,q>1$ 时, 绝对收敛; 当 $0<p=q\leqslant 1$ 时, 条件收敛; 其余情形均发散.

28. 证明: 如果将收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项重新排列, 使得每一项离开原有位置不超过 m 个位置 (m 为任一给定的正整数), 则重排后的新级数仍收敛, 且和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的 n 项部分和为 s_n, 和为 s, 即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{2}$$

由 (1), (2) 可知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$|s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2},|a_{n+1}|<\frac{\varepsilon}{2m},|a_{n+2}|<\frac{\varepsilon}{2m},\cdots. \tag{3}$$

设重排后的级数 n 项和为 σ_n. 由题设知

$$\sigma_{n+m}=s_n+b_1+b_2+\cdots+b_m,$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的第 $n+1$ 项至第 $n+2m$ 项中某 m 项. 从 (3) 知, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$|b_k|<\frac{\varepsilon}{2m}\quad (k=1,2,\cdots,m).$$

于是

$$\begin{aligned}|\sigma_{n+m}-s|&=|s_n+b_1+b_2+\cdots+b_m-s|\\&\leqslant|s_n-s|+|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_m|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2m}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2m}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{n+m}=s.$$

29. 给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$, 其中 a_n 均为实数. 证明: 存在 $r\ (-\infty\leqslant r\leqslant+\infty)$, 使当 $x<r$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 发散, 而当 $x>r$ 时收敛.

证　首先我们证明, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛, $\lambda\in(-\infty,+\infty)$, 则对任意 $x>\lambda,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 也收敛.

事实上, 因

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}\cdot\frac{1}{n^{x-\lambda}},$$

而 $x-\lambda>0$, 故 $\left\{\frac{1}{n^{x-\lambda}}\right\}$ 为一单调递减的有界数列. 因此, 由 Abel 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

兹证题中 r 的存在性.

事实上, 若对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 皆收敛或皆发散, 则 $r=+\infty$ 或 $r=-\infty$, 故所证成立, 因此, 不妨设有 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_1}}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_2}}$ 收敛. 由前面所证可知必有 $x_1<x_2$. 令

$$E=\left\{x:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\ \text{收敛}\right\},$$

则集 E 非空且有下界, 故 $r=\inf E$ 存在. 此 r 即为所求, 因为按下确界的定义, 有 $x_n\to r\ (n\to\infty),x_n\in E,x_n\geqslant r$, 由前面证得的结果知, 若 $x>x_n$, 则 $x\in E$. 因 $x_n\to r\ (n\to\infty)$, 故对任意 $x>r$, 皆有 $x\in E$. 若 $x<r$, 由 r 的定义显然 $x\notin E$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 发散.

30. 设 $\varphi(x)$ 对于正值 x 有意义, 并且当 x 足够大时可以表示为级数

$$\varphi(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots,$$

这里 a_0,a_1 是实数. 证明: 当且仅当 $a_0=a_1=0$ 时, 级数

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)+\cdots$$

收敛.

证 必要性: 因为对于足够大的 x, 级数

$$a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots$$

收敛, 所以对于某个 x_0, 有 $\frac{a_n}{x_0^n}\to 0\ (n\to\infty)$. 于是存在 c, 使得 $a_n\leqslant c^n$, 从而当 $x>2c$ 时,

$$\left|\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots\right|\leqslant\frac{c^2}{x^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)=\frac{2c^2}{x^2},$$

亦即

$$\varphi(n)=a_0+\frac{a_1}{n}+\varepsilon(n),$$

这里对足够大的 $n, |\varepsilon(n)|<\frac{K}{n^2}$. 现在可以看到, 当 $a_0=a_1=0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 收敛, 这是因为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{n^2}$ 为其优级数.

充分性: 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 收敛, 那么 $\varphi(n)\to 0\ (n\to\infty)$. 由此 $a_0=0$. 如果此时 $a_1\neq 0$, 那么 $\varphi(n)=\frac{a_1}{n}+\varepsilon(n)=a_1\left[\frac{1}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. 与调和级数相比较, 可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 发散, 矛盾.

31. 设 $0<\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$, φ 是 $[\lambda_1,+\infty)$ 上的正值非减函数, 使得

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}<+\infty.$$

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)}(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}})$ 收敛 ([22], 1964, p. 445).

证 因

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_{n+1})}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}\varphi(\lambda_{n+1})}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\frac{dt}{t\varphi(t)}<+\infty,\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_{n+1})}(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}})$ 收敛. 又因

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_{n+1})}\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\varphi(\lambda_n)}-\frac{1}{\varphi(\lambda_{n+1})}\right)\\
&<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\varphi(\lambda_n)}-\frac{1}{\varphi(\lambda_{n+1})}\right)\leqslant\frac{1}{\varphi(\lambda_1)},
\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\varphi(\lambda_n)}(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n+1}})$ 也收敛.

32. r 是什么实数时, 级数

$$\frac{1}{2}+r\cos x+r^2\cos 2x+r^3\cos 4x+\cdots$$

的所有部分和对所有的 x 非负?

解　因为 $\frac{1}{2}+r\cos x\geqslant 0$, 所以 $|r|\leqslant\frac{1}{2}$. 我们记 $\varphi(y)=r\cos y+r^2\cos 2y$, 则当 $y=k\pi$ 或 $\cos y=-\frac{1}{4r}$ 时,

$$\varphi'(y)=-r\sin y(1+4r\cos y)=0.$$

因 $|r|\leqslant\frac{1}{2}$, 故在第一种情形下, $\varphi(y)\geqslant-\frac{1}{4}$; 而在第二种情形下, $\varphi(y)=-\frac{1}{4}+r^2\left(\frac{1}{8r^2}-1\right)\geqslant-\frac{3}{8}$. 因此, 对任何 $y,\varphi(y)\geqslant-\frac{3}{8}$.

其次, 我们求得

$$\begin{aligned}
s_{2n+1}&=\frac{1}{2}+\varphi(x)+r^2\varphi(4x)+\cdots+r^{2(n-1)}\varphi(4^{n-1}x)\\
&\geqslant\frac{1}{2}-\frac{3}{8}(1+r^2+\cdots+r^{2(n-1)})\\
&\geqslant\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{4-4^{-(n+1)}}{8}=\frac{1}{2\cdot 4^n}=\frac{1}{2^{2n+1}}>0.\\
s_{2n+2}&=s_{2n+1}+r^{2n+1}\cos 2^{2n}x\geqslant s_{2n+1}-\frac{1}{2^{2n+1}}\geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此, 当 $|r|\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 所有部分和非负.

33. 证明 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$ 为条件收敛级数.

证　因

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sin n=\frac{\cos\frac{3}{2}-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\quad(m=2,3,\cdots),$$

故

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\sin n\right| \leqslant \frac{1}{\sin\dfrac{1}{2}} \quad (m=2,3,\cdots).$$

又 $n \geqslant 2$ 时, $\frac{1}{\ln n} > 0$ 且单调减少趋于 0, 故由 Dirichlet 判别法, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$$

收敛. 又, 对任意 $x \in (-\infty,+\infty), \sin x$ 与 $\sin(x+1)$ 不同时为 0, 故

$$f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)|$$

是 $(-\infty,+\infty)$ 上的正值周期连续函数. 于是, 存在 $l>0$, 使

$$f(x) \geqslant l[x \in (-\infty,+\infty)].$$

因此,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\ln n} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\sin 2k|}{\ln 2k} + \frac{|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}\right)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin 2k| + |\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)} \geqslant l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)},\end{aligned}$$

而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}$ 发散, 故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\ln n}$ 发散.

34. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$ 的收敛域.

解 (i) 当 $x=0$ 时, 级数显然收敛.

(ii) 当 $x>0$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin nx}{e^{nx}}\right| \leqslant \frac{1}{e^{nx}},$$

故原级数绝对收敛.

(iii) 当 $x<0$ 时, 则

α) 若 $x=-\lambda\pi$ $(\lambda=1,2,\cdots)$, 这时级数各项为 0, 故原级数收敛.

β) 若 $x=-\lambda\pi$, 当 λ 为无理数时, 就有 $\sin n\lambda \neq 0$, 于是 $\frac{\sin nx}{e^{nx}} \to \infty$ $(n\to\infty)$, 故级数发散. 当 λ 为有理数时, 即 $\lambda=\frac{p}{q}$ (p 与 q 为互素整数), 在 n 是 q 的倍数时, $\sin nx = 0$, 而在其他情形, 都有 $\sin nx \neq 0$. 显然, 级数的通项不趋于零, 因此级数发散.

综上讨论, 可知仅当 $x \geqslant 0$ 及 $x=-k\pi$ $(k=1,2,\cdots)$ 时级数收敛.

35. 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$$

的敛散性.

解　当 $x=k\pi$ 时, 级数显然收敛.

当 $x\neq k\pi$ 时, 令 $a_n=\sin nx$,

$$
\begin{aligned}
b_n&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},\\
b_{n+1}-b_n&=\frac{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{n(n+1)}\\
&=\frac{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)+1}{n(n+1)}\\
&<0,\quad b_n\to 0\quad (n\to\infty),
\end{aligned}
$$

$$
\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\sum_{k=1}\frac{\sin kx\sin x}{\sin x}\right|=\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}(\cos(k-1)x-\cos(k+1)x)\right|}{2|\sin x|}\leqslant\frac{2}{|\sin x|},
$$

由 Dirichlet 判别法知级数收敛.

36. 设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 都是单调递减趋于零的数列. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w_n$ 为收敛的充要条件是:

$$
w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1\to 0\quad (n\to\infty).
$$

证　必要性是显然的, 今证充分性. 令

$$
\begin{aligned}
A_n&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k,\quad B_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}v_k,\\
C_n&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}w_k,
\end{aligned}
$$

并以 A,B 分别表 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k,\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}v_k$, 则

$$
\begin{aligned}
C_n&=w_1-w_2+w_3+\cdots+(-1)^{n-1}w_n\\
&=u_1v_1-u_1v_2+u_1v_3-\cdots+(-1)^{n-1}u_1v_n\\
&\qquad -u_2v_1+u_2v_2-\cdots+(-1)^{n-1}u_2v_{n-1}\\
&\qquad\qquad +u_3v_1-\cdots+(-1)^{n-1}u_3v_{n-2}\\
&\qquad\qquad\qquad -\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +(-1)^{n-1}u_nv_1\\
&=u_1B_n-u_2B_{n-1}+u_3B_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}u_nB_1.
\end{aligned}
$$

从而

$$
A_nB-C_n=u_1(B-B_n)-u_2(B-B_{n-1})+\cdots+(-1)^{n-1}u_n(B-B_1).
$$

据题设

$$|B-B_n|\leqslant v_{n+1},|B-B_{n-1}|\leqslant v_n,\cdots,|B-B_1|\leqslant v_2,$$

于是

$$\begin{aligned}|A_nB-C_n|&\leqslant u_1v_{n+1}+u_2v_n+\cdots+u_nv_2\\&=w_{n+1}-u_{n+1}v_1\to 0\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}A_nB=AB.$$

37. 设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 都是递减趋于 0 的数列. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数收敛的充要条件是 $U_nv_n\to 0$ 并且 $V_nu_n\to 0$, 这里

$$U_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\quad V_n=v_1+v_2+\cdots+v_n.$$

证 充分性: 设 $U_nv_n\to 0,V_nu_n\to 0$, 则由 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 的单调性, 得到

$$\begin{aligned}w_{2n}&=u_1v_{2n}+u_2v_{2n-1}+\cdots+u_nv_{n+1}+u_{n+1}v_n+\cdots+u_{2n}v_1\\&\leqslant(u_1+u_2+\cdots+u_n)v_n+(v_1+v_2+\cdots+v_n)u_n\\&=U_nv_n+V_nu_n,\\w_{2n+1}&\leqslant U_nv_n+V_nu_n+u_{n+1}v_{n+1}.\end{aligned}$$

所以 $w_n\to 0$, 于是由本章问题 36 知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数收敛.

必要性: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}v_n$ 的乘积级数收敛, 则 $w_n\to 0$ (参看本章问题 36). 于是, 由

$$\begin{aligned}&U_nv_n=(u_1+u_2+\cdots+u_n)v_n\leqslant u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1=w_n,\\&V_nu_n\leqslant w_n\end{aligned}$$

可知 $U_nv_n\to 0,V_nu_n\to 0\ (n\to\infty)$.

38. 设收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 中至少有一个绝对收敛, 又设 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$. 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 必收敛, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.$$

证 不妨设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 为绝对收敛, 且设

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\to A,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k\to B\quad(n\to\infty).$$

$$C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k,\quad \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|=A',\quad |B_n|\leqslant B'.$$

则如同本章问题 36 的证明, 可得

$$A_nB-C_n=a_0(B-B_n)+a_1(B-B_{n-1})+\cdots+a_n(B-B_0)$$

从而

$$\begin{aligned}|A_nB-C_n|&\leqslant\sum_{\nu=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)-1}|a_\nu||B-B_{n-\nu}|+\sum_{\nu=\left(\frac{n}{2}\right)}^{n}|a_\nu||B-B_{n-\nu}|\\&\leqslant A'\max_{\left(\frac{n}{2}\right)\leqslant k\leqslant n}|B-B_k|+2B'\sum_{\nu=\left(\frac{n}{2}\right)}^{n}|a_\nu|,\end{aligned}$$

可见 $A_nB-C_n\to 0$, 即 $C_n\to AB\ (n\to\infty)$.

反　例

1. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

取 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

注　容易证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 必定收敛. 上述反例说明了在这个命题中, 不能把绝对收敛减弱为条件收敛.

2. 一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

取 $a_n=\frac{1}{n}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

注　如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a^2$ 也收敛. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

3. 一个发散级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$, 使对每一 $k\geqslant 2$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_{k^n}$ 都收敛.

令 $a_n=\frac{1}{n\ln n}$, 则级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

发散, 但对每一 $k\geqslant 2$, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_{k^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{k^n n\ln k}$$

收敛.

4. 一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$ 发散.

令 $a_n=\frac{1}{n\ln^2(n+1)}$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n+1)}$$

收敛. 但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$$

发散.

注 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么由不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

可知. 当 $p>\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ 收敛. 上述反例说明了当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 这个结论不再正确.

5. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.

取 $a_n=(-1)^n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 由于 $a_{2n-1}+a_{2n}=0\ (n=1,2,\cdots)$, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.

注 容易证明, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 也收敛, 且其和相等. 上述反例说明了它的逆命题并不成立.

6. 两个发散的非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 收敛.

容易证明, 如果非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 也均收敛. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ 亦必发散. 然而, $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}$ 未必发散, 例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 皆发散, 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}=0+0+\cdots$$

却收敛.

7. 一个发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其部分和数列有界且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

设 $\{a_n\}$ 为

$$1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\cdots,$$

则 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 且对每一 n, 都有 $0\leqslant s_n\leqslant 1$, 其中

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

然而, 由于 $\{s_n\}$ 中有无穷多个 s_n 取值为 0, 又有无穷多个 s_n 取值为 1, 因而 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 并不存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么其部分和数列有界且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$. 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

8. 任给一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以构造一个收敛于零的正数列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 仍然发散.

令 $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 我们先证明级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}}$$

发散. 因数列 $\{s_k\}$ 发散于无穷大, 故对任意正整数 m, 存在正整数 n 使 $s_{n+1} > 2s_m$. 又, 数列 $\{s_k\}$ 是递增的, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}} &\geqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{n+1}} = \frac{s_{n+1} - s_m}{s_{n+1}} \\ &> \frac{s_{n+1} - \frac{1}{2} s_{n+1}}{s_{n+1}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

即对任意正整数 m, 存在正整数 n, 使

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}} > \frac{1}{2}.$$

这表明级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}}$ 的部分和不能形成 Cauchy 数列, 从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1}} = +\infty.$$

但 $s_{k+1} - s_k = a_{k+1}$, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{s_{k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{s_k} = +\infty.$$

取 $c_k = \frac{1}{s_k}$, 则 $k \to \infty$ 时 $c_k \to 0$ 且 $\sum_{k=2}^{\infty} c_k a_k = +\infty$.

注　这个例子特别证明了无论一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 怎样慢地发散于无穷大, 总会有一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ 比它发散得更慢.

9. 任给一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 可以构造一个收敛于零的正数列 $\{c_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ 仍然收敛.

令 $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, c_n = \sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}$, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故有

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0.$$

现证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n}$ 收敛. 为此, 令

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}),$$

则当 $n>m$ 时

$$\begin{aligned}|s_n-s_m| &= \sum_{k=m+1}^{n}(\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k})=\sqrt{r_m}-\sqrt{r_n}\\ &\to 0\quad (m,n\to\infty).\end{aligned}$$

据 Cauchy 收敛准则, 知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{c_k}$ 收敛.

注 这个例子特别证明了无论一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 怎样慢地收敛, 总会有一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$ 比它收敛得更慢.

本章反例 8 和反例 9 使我们得到这样的有原则性的断言: 任何收敛 (发散) 级数不可能作为建立跟此级数相比较的另一级数的收敛性 (发散性) 的比较法的万能的工具.

10. 给定使 $\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n=0$ 的正数列 $\{b_n\}$, 有一个正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 适合 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 且 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

从 $\{b_n\}$ 中选取不相邻项的子列 $\{b_{n_k}\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=0$, 然后设 $a_{n_k}=b_{n_k}^2$ $(k=1,2,\cdots)$. 至于每个其他值的 n : $n=m_1,m_2,\cdots,m_j,\cdots$, 设 $a_{m_j}=\frac{1}{j}$. 于是, 当 $n\to\infty$ 时 $a_n\to 0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 又 $k\to\infty$ 时 $\frac{a_{n_k}}{b_{n_k}}=b_{n_k}\to 0$, 所以 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

注 这个例子特别证明了无论一个正数列 $\{b_n\}$ 怎样快地收敛于零, 总有一个足够慢地收敛于零的正数列 $\{a_n\}$ 以确保级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的发散性, 而且 $\{a_n\}$ 还有一个子列比 $\{b_n\}$ 相应的子列收敛于零更快.

11. 给定使 $\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n=0$ 的正数列 $\{b_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 适合 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$.

选定 $\{b_n\}$ 的一个子列 $\{b_{n_k}\}$, 使得对于各正整数 k, 都有 $b_{n_k}<k^{-3}$, 然后令 $a_{n_k}=k^{-2}$ $(k=1,2,\cdots)$. 至于其他值的 n, 设 $a_n=n^{-2}$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, 又当 $k\to\infty$ 时, $\frac{a_{n_k}}{b_{n_k}}\to+\infty$, 从而 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$.

注 这个例子特别证明了无论一个正数列 $\{b_n\}$ 怎样慢地收敛于零, 总有一个足够快地收敛于零的正数列 $\{a_n\}$ 以确保级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性, 而且 $\{a_n\}$ 还有一个子列比 $\{b_n\}$ 的相应子列收敛于零更慢.

12. 给定一个满足 $\underline{\lim}_{n\to\infty}c_n=0$ 的正数列 $\{c_n\}$, 有一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和一个正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, 使得 $\frac{a_n}{b_n}=c_n$.

选定 $\{c_n\}$ 的一个子列 $\{c_{n_k}\}$, 使得对于正整数 k, 都有 $c_{n_k}<k^{-2}$, 然后设 $a_{n_k}=c_{n_k},b_{n_k}=1$ $(k=1,2,\cdots)$. 至于每个其他值的 n, 设 $a_n=n^{-2},b_n=(n^2c_n)^{-1}$. 于是, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 由于 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 而且 $\frac{a_n}{b_n}=c_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

注 这个例子特别证明了无论一个正数列 $\{c_n\}$ 怎样慢地收敛于零, 总存在这样两个正项级数, 一个收敛, 另一个发散, 而它们第 n 项的比值就是 c_n.

13. 给定使 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的数列 $\{a_n\}$, 有一个递减的正数列 $\{b_n\}$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

下面的构造法属于 Blair[28].

定义正整数列 $\{m_k\}$ 使

(i) $|a_n| < 2^{-k}$ $(n \geqslant m_k)$.

(ii) $m_k > 2m_{k-1}$.

对 $m_k < n \leqslant m_{k+1}$, 定义

$$b_n = \frac{1}{m_{k+1} - m_k}.$$

据 (ii), $m_{k+1} - m_k > m_k - m_{k-1}$. 因此, 对一切 k 均有 $b_{k+1} \leqslant b_k$. 因

$$\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} b_n = 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. 又因

$$\sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} |a_n b_n| = \frac{1}{m_{k+1} - m_k} \sum_{n=m_k+1}^{m_{k+1}} |a_n| \leqslant 2^{-k},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

14. 存在一个正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得 $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$.

若 n 是整数的平方, 则令 $a_n = \frac{1}{n}$, 否则就令 $a_n = \frac{1}{n^2}$. 于是 $a_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 这是因为它的任何部分和不超过

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = c < +\infty.$$

15. 存在一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

级数

$$1 - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \cdots - \underbrace{\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}} - \cdots - \frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}}}_{n} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \cdots$$

收敛, 并且其和为 1. 但是, 由它的项的立方组成的级数是发散的, 这是因为这个级数的下列形式的部分和

$$1 - \frac{1}{2^3\cdot 2} - \frac{1}{2^3\cdot 2} + \frac{1}{2} - \cdots - \underbrace{\frac{1}{n^3\cdot n} - \cdots - \frac{1}{n^3\cdot n}}_{n\text{ 个}} + \frac{1}{n}$$

等于 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{n^3}$, 当 $n \to \infty$ 时, 它趋于 $+\infty$.

16. 存在一个正整数列 $\{n_k\}$, 使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}<+\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_{n_k}}=+\infty.$$

我们选取这样的正整数列 $\{n_k\}$, 它适合

$$n_{k^3}=k^2\quad (k=1,2,\cdots),$$

而其余各项组成如下的子列:

$$1,2^3,2^3,3^3,3^3,3^3,\cdots,\underbrace{k^3,\cdots,k^3}_{k\text{ 个}},\cdots.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<+\infty.$$

另一方面, 子列 $\{n_{n_k}\}$ 中相应于非整数立方的足码 k 的那些项, 组成了如下形式的子列:

$$1^2,2^2,2^2,\cdots,\underbrace{k^2,\cdots,k^2}_{k\text{ 个}},\cdots.$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_{n_k}}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

17. 任给正数 s, 存在正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使对任何正数 σ $(0<\sigma\leqslant s)$, 都可以用一个无穷子级数来表示: $\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\sigma$.

先做一个收敛于 s 的级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=s,$$

使其项满足不等式

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots,$$
$$0<a_n\leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots\quad (n=1,2,\cdots).$$

记

$$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+\nu}=s_{n,\nu}\quad (n=1,2,\cdots;\nu=0,1,2,\cdots).$$
$$\lim_{\nu\to\infty}s_{n,\nu}=s_n\quad (n=1,2,\cdots).$$

假定 a_{n_1} 是满足 $a_{n_1}<\sigma$ 的第一项, 则或者存在 ν_1, 使 $s_{n_1,\nu_1}<\sigma, s_{n_1,\nu_1+1}\geqslant\sigma,\nu_1\geqslant 0$; 或者有 $s_{n_1}\leqslant\sigma$. 在第二种情形, 由于 $s_{n_1}\geqslant a_{n_1-1}\geqslant\sigma$, 因此有 $s_{n_1}=\sigma$ (当 $n_1=1$

时, 这意味着 $s_1 = s \geqslant \sigma$), 即 σ 可以用一个无穷子级数表示. 在第一种情况, 我们确定满足 $n_2 > n_1 + \nu_1$ 与 $s_{n_1,\nu_1} + a_{n_2} < \sigma$ 的第一项 a_{n_2}, 则或者存在 ν_2, 满足 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2,\nu_2} < \sigma, s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2,\nu_2+1} \geqslant \sigma, \nu_2 \geqslant 0$, 或者 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2} \leqslant \sigma$. 在第二种情形, 我们有 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2} = \sigma$, 这是因为 $s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2} \geqslant s_{n_1,\nu_1} + a_{n_2-1} \geqslant \sigma$ (因 $s_{n_1,\nu_1} + a_{n_1+\nu_1+1} = s_{n_1,\nu_1+1} \geqslant \sigma$, 故 $n_2 > n_1 + \nu_1 + 1$), 即 σ 又可以用一个无穷子级数表示. 如果这个过程永不终止 (如果在每一步总出现第一种情形), 则

$$\sigma = s_{n_1,\nu_1} + s_{n_2,\nu_2} + s_{n_3,\nu_3} + \cdots .$$

注　如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足条件:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

那么例 17 中的每个 σ, 仅能用一个无穷子级数来表示. 事实上, 从关系式

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots ,$$
$$a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots .$$

推出 $a_n = 2a_{n+1}$, 因此 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, \cdots, a_n = \frac{1}{2^n}, \cdots$, 这种无限二进位小数的表示法是唯一的.

18. 存在一个无穷级数, 使得每个大于 1 的整数的倒数是这个级数的有限个相邻项之和.

考虑无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. 因为

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \tag{1}$$

故得

$$\sum_{n=a}^{b-1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

因此, 这个问题就等于求出正整数 a 与 b, 使对固定的整数 $m > 1$, 有

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{m}.$$

从 (1) 式看出其解是 $a = m - 1, b = m(m-1)$, 故当 $m > 1$ 时得

$$\frac{1}{m} = \sum_{n=m-1}^{m(m-1)-1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

19. 存在一个正项级数, 使任何正有理数都是它的有限个不同项之和.

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有所需的性质. 事实上, 设 A, B 是正整数, 则由此级数的发散性, 存在唯一的非负整数 n_0, 使

$$\sum_{j=0}^{n_0}\frac{1}{j}<\frac{A}{B}\leqslant\sum_{j=0}^{n_0+1}\frac{1}{j}$$

($\sum_{j=0}^{0}\frac{1}{j}$ 算作 0, 而当 $n_0\geqslant 1$ 时 $\sum_{j=0}^{n_0}\frac{1}{j}$ 理解为 $\sum_{j=1}^{n_0}\frac{1}{j}$). 若等式成立, 则已得到所需要的表达式. 故设

$$\frac{A}{B}<\sum_{j=0}^{n_0+1}\frac{1}{j},$$

此时, $\frac{A}{B}-\sum_{j=0}^{n_0}\frac{1}{j}=\frac{C}{D}<\frac{1}{n_0+1}$. 取 n_1 为满足 $\frac{1}{n_1+1}\leqslant\frac{C}{D}<\frac{1}{n_1}$ 的唯一的正整数. 再设不等式成立 (否则问题已解决), 并令

$$\frac{C}{D}-\frac{1}{n_1+1}=\frac{E}{F}>0.$$

但

$$\frac{E}{F}=\frac{C(n_1+1)-D}{D(n_1+1)},\quad C(n_1+1)-D<C,$$

因此, E/F 为最简分数时必有 $E<C$. 由于

$$\frac{E}{F}<\frac{1}{n_1(n_1+1)},$$

故满足 $\frac{1}{n_2+1}\leqslant\frac{E}{F}<\frac{1}{n_2}$ 的唯一的正整数 n_2 也必满足 $n_2>n_1$. 在有限步后, 我们必然得到所要求的表达式, 因为, 即使在前面各步得不到, 也一定会在所导出的分数的分子为 1 时得到.

20. 通项趋于零而发散的交错级数.

设 $a>0, b>0$ 且 $a\neq b$, 考察下列交错级数

$$\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots.$$

易见, 该级数的通项趋于零. 设该级数的第 n 部分和为 S_n, 收敛交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的第 n 部分和为 T_n, 且其和为 T, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的第 n 部分和为 U_n, 则

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}\\&=a\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=aT_{2n}+\frac{a-b}{2}U_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{2n+1}&=\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\frac{a}{2n+1}\\&=a\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)+(a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\&=aT_{2n+1}+\frac{a-b}{2}U_n.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}T_n=T,\quad \lim_{n\to\infty}U_n=+\infty,$$

所以当 $a>b$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=+\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

而当 $a<b$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=-\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\infty.$$

因此, 该交错级数发散.

注　上述反例说明了关于交错级数的 Leibniz 判别法中, 通项的单调性这一条件是不能去掉的.

21. 根检法失效的级数.

对于非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 根检法陈述为: 给定非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 令

$$c=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n},$$

则 (i) $c<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(ii) $c>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(iii) $c=1$ 时此法失效.

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 它们都有 $c=1$, 而第一个级数发散, 第二个级数收敛. 这说明在 $c=1$ 的情况下, 根检法失效.

22. 比检法失效的级数

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 比检法陈述为:

(i) 当 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(ii) 当对 $n\geqslant n_0$ 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 这里 n_0 是某个确定的正整数;

(iii) 当 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 时此法失效.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也可作为比检法失效的正项级数, 因为当 $n \to \infty$ 时它们都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$, 但第一个级数发散, 第二个收敛.

注 比检法用起来常常比根检法容易, 但根检法适用范围更广泛, 一旦比检法给出收敛的结论时, 用根检法亦然; 而根检法失效时, 比检法也失效. 这是因为有下述的一般事实: 对任意正数列 $\{c_n\}$, 有

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$$

及

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

对级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$, 上述两个不等式为

$$0 < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < +\infty.$$

对这个级数, 由根检法知收敛, 而比检法失效.

23. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 存在而 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在的正数列 $\{a_n\}$.

考虑数列 $\{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}\}$. 因 $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$,

而

$$1 \leqslant \left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 2^{\frac{1}{n}},$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

但是极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$$

并不存在.

注 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $(a_n > 0)$ 存在, 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 亦必存在且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(参看第一章问题 24). 上述反例说明了这个命题之逆并不成立.

24. 两个收敛级数, 其 Cauchy 乘积级数发散.

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 为两个相等的级数:

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

于是, 根据交错级数的 Leibniz 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛. 但是,

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}},$$

而

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

所以

$$|c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

因此, Cauchy 乘积级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 发散.

注　关于 Cauchy 乘积级数有如下的 Mertens 定理 (参看第一章问题 38): 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛于 a, 又如果 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛于 b, 并且这两个级数当中至少有一个绝对收敛, 那么乘积级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛于 ab. 上述反例说明在 Mertens 定理中, 两个级数当中至少有一个绝对收敛这个条件是不能去掉的.

25. 两个条件收敛级数, 其 Cauchy 乘积级数绝对收敛.

Davies 和 Weinman[35] 提出如下问题: 两个条件收敛级数的 Cauchy 乘积是否有可能是绝对收敛的? Owens[61] 给这个问题以肯定的回答. 他的例子如下:

如所周知, 当 $|t| < 1$ 时, 对任何实数 m, 函数 $(1+t)^m$ 的 Taylor 级数是绝对收敛的. 若 $-1 < m < 0$, 则当 $t = 1$ 时相应的级数条件收敛, 而当 $t = -1$ 时发散, 由此可知, 级数

$$f(x) = (1+x)(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

和

$$g(x) = (1-x+x^2)(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

当 $|x| < 1$ 时绝对收敛, 而当 $x = 1$ 时条件收敛, 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都是条件收敛的.

因对任意 x, 恒有 $f(x)g(x) = 1$, 故 $c_0 = 1, c_n = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 其中

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

26. 两个发散级数, 其 Cauchy 乘积级数绝对收敛.

设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

由于这两个级数的通项都不趋于零, 因而它们都是发散级数.

若令 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, 则

$$\begin{aligned}
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) \\
&\quad - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{2^{n+1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

等式右边是公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比级数, 故为绝对收敛级数.

27. 具有发散重排的收敛级数

任何条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项都可以重排而给出发散级数或重排后其和为事先指定的任意数. 事实上, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的非负部分与负部分分别为 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, 因 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 也都发散. 设 c 是任意 (有限) 实数. 我们如下地确定重排: 先放置项

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{m_1}$$

直至此和刚超过 c, 然后接项

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_{n_1}$$

直至整个部分和刚小于 c. 然后再接上项

$$p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \cdots + p_{m_2}$$

直至整个部分和刚超过 c, 然后是

$$q_{n_1+1}+q_{n_1+2}+\cdots+q_{n_2}$$

直至整个部分和刚小于 c, 如此继续. 上述各步都是能行的, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 是发散的. 由于 $n\to\infty$ 时 $p_n\to 0, q_n\to 0$ (因为 $n\to\infty$ 时 $a_n\to 0$), 而重排后级数的部分和与 c 的差的绝对值始终小于数列 $\{p_n\}$ 的某一项, 或者小于数列 $\{|q_n|\}$ 的某一项, 故这样得到的 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的重排级数收敛于 c.

为了看到存在 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的重排使其部分和发散于 $+\infty$, 我们考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的这样的重排: 交错地放置一组正项和一个负项. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 发散, 它的部分和无界, 故可取充分大的 m_1 使

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}>1-q_1,$$

然后取 $m_2>m_1$ 使

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}+\cdots+p_{m_2}>2-q_1-q_2,$$

一般地, 可取充分大的 $m_k>m_{k-1}$, 使

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_k}>k-q_1-q_2-\cdots-q_k \quad (k=3,4,\cdots).$$

因此, 交错地放置一组正项和一个负项的级数

$$p_1+\cdots+p_{m_1}+q_1+p_{m_1+1}+\cdots+p_{m_2}+q_2+p_{m_2+1}+\cdots$$

显然是发散的, 它的第 k 个部分和

$$p_1+\cdots+p_{m_1}+q_1+\cdots+p_{m_k}+q_k$$

超过 k.

类似地可得到 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的发散于 $-\infty$ 的重排.

27 所述的排法就是著名的 “Riemann 重排定理”.

Sierpinski[75] 曾经指出, 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是条件收敛级数其和为 s, 又 $s'<s$, 那么, 经过某种只涉及正项的重排 (负项留在它们原来的位置), 重排后的级数以 s' 为和. 类似的陈述可用于数 $s''>s$, 并且重排只涉及负项. 这显然是 “Riemann 重排定理” 的一种推广.

28. 一个发散级数, 用重排不可能加快其发散程度.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是发散的正项级数, 满足 $a_n\geqslant a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 则对任意正整数列

$$0<m_1<m_2<m_3<\cdots,$$

恒有

$$m_1 \geqslant 1, m_2 \geqslant 2, \cdots, m_n \geqslant n, \cdots,$$

因此

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_n}.$$

由此可知, 用任意的重排都不可能加快 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的发散程度.

29. 一个发散级数, 用重排可以任意减慢其发散程度.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个通项趋于零的正项发散级数, 令

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

则

$$\lim_{n \to \infty} s_n = +\infty.$$

任取数列 $\{b_n\}$, 适合

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = +\infty.$$

我们只要证明, 存在重排级数

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_n} + \cdots,$$

使对一切 $n = 1, 2, \cdots$, 都有

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_n} \leqslant b_n.$$

为此, 设 $r_1, r_2, \cdots; s_1, s_2, \cdots$ 是两列无公共项的递增的正整数列, 又设每个正整数总要出现在这两个数列中的一个或另一个之中, 于是, 对 $m, n = 1, 2, \cdots$, 有

$$r_m < r_{m+1}, s_n < s_{n+1}, r_m > s_n \quad \text{或} \quad r_m < s_n.$$

称两个级数

$$a_{r_1} + a_{r_2} + \cdots \quad \text{和} \quad a_{s_1} + a_{s_2} + \cdots$$

(“红” 的和 “蓝” 的) 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**互补的子级数**. 现如次确定 “红” 的子级数 $a_{r_1} + a_{r_2} + \cdots$, 使

$$a_{r_n} < \min\{2^{-n}, b_n - b_{n-1}\} \quad (n = 1, 2, \cdots, b_0 = 0),$$

则

$$a_{r_1} + a_{r_2} + \cdots + a_{r_n} < b_n,$$

且整个 “红” 的子级数收敛, 还容易看出, $b_n-(a_{r_1}+a_{r_2}+\cdots+a_{r_n})$ 无限制地增加. 因而, 在关系式

$$\sum_{i=1}^{n} a_{r_i} < b_n$$

的容许范围内可以逐个收容互补子级数的项. 这样就完成了所需的重排.

30. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使形如 $a_k+a_{k+l}+a_{k+2l}+\cdots$ 的子级数 (下标成等差级数, k,l 为正整数) 都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不绝对收敛.

下面的例子属于 Knopp[54]. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散, 令

$$a_1=b_1, \quad a_2=a_3=\frac{b_2}{2!},$$

$$a_4=a_5=\cdots=a_9=\frac{b_3}{3!},$$

$$a_{10}=\cdots=a_{33}=\frac{b_4}{4!},\cdots.$$

注意当 $n \geqslant l$ 时, $n!$ 能被 l 整除, 因此当把属于同一个 b_m 的所有项放在一起之后, 除了有限多项外, 就能把子级数 $a_k+a_{k+l}+a_{k+2l}+\cdots$ 变为级数 $\frac{1}{l}b_1+\frac{1}{l}b_2+\frac{1}{l}b_3+\cdots$. 由此可知, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k+(i-1)l}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|=\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散.

31. 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使形如 $a_k+a_{kl}+a_{kl^2}+\cdots$ 的子级数 (下标成几何级数, $k \geqslant 1, l \geqslant 2$ 均为正整数) 都收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 并不绝对收敛.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散, 并设 $\varphi(n)=kl^n, \Phi(n)=2^{n^2}$, 则 $\{\varphi(n)\}$ 和 $\{\Phi(n)\}$ 都是严格递增的正整数列. 现在定义一新的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其通项为

$$a_\nu=\frac{b_m}{\Phi(m)-\Phi(m-1)}=\frac{b_m}{2^{m^2}-2^{(m-1)^2}}, \quad 2^{(m-1)^2}<\nu \leqslant 2^{m^2};$$

且

$$a_1=a_{\Phi(1)}=\frac{b_1}{\Phi(1)}=\frac{b_1}{2}.$$

由不等式 $\varphi(t_m) \leqslant \Phi(m) < \varphi(t_m+1)$ 可以完全确定正整数 t_m. 把属于同一个 b_m 的项放在一起, 就能把级数 $a_{\varphi(1)}+a_{\varphi(2)}+\cdots$ 变为级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t_m-t_{m-1}}{2^{m^2}-2^{(m-1)^2}} b_m.$$

可以证明, 数列 $\frac{t_m-t_{m-1}}{2^{m^2}-2^{(m-1)^2}}$ 在某个 m 以后是单调递减的. 于是, 由 Abel 判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ 收敛, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{kl^{n-1}}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|=\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散.

这个例子也是属于 Knopp[54] 的.

32. 对于任一条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和任一实数 x, 数列 $\{\varepsilon_n\}$, 其中 $|\varepsilon_n|=1$ $(n=1,2,\cdots)$, 能使 $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n=x$.

这里的方法类似于本章反例 27 中所用过的方法. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$, 我们可以添上绝对值为 1 的因子 ε_n, 使得

$$\varepsilon_1 a_1+\cdots+\varepsilon_n a_n=|a_1|+\cdots+|a_n|>x.$$

设 n_1 为能确保这个不等式成立的 n 的最小值. 再给后面的一些项配备绝对值为 1 的因子 ε_n, 以便得到 (用最小可能的 n_2):

$$\varepsilon_1 a_1+\cdots+\varepsilon_{n_2} a_{n_2}=|a_1|+\cdots+|a_{n_1}|-|a_{n_1+1}|-\cdots-|a_{n_2}|<x.$$

如果这个过程以部分和交替地大于 x 和小于 x 重复下去, 由于当 $n\to\infty$ 时, $a_n\to 0$, 于是, 类似于本章反例 27, 得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n$ 必然收敛于 x.

33. 非绝对收敛级数, 适当地引进括号后变成绝对收敛级数.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为非绝对收敛级数, 因 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 故由 Cauchy 收敛准则, 对任给 $\varepsilon>0$, 有正整数 n_0 存在, 当 $n>n_0$ 时对一切正整数 p 有

$$|s_{n+p}-s_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon.$$

今取 $\varepsilon=1$, 则有正整数 n_1 存在, 对于一切正整数 p_1,

$$|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_1+p_1}|<1.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$, 则有正整数 n_2 存在 (可取 $n_2>n_1$), 对于一切正整数 p_2,

$$|a_{n_2+1}+\cdots+a_{n_2+p_2}|<\frac{1}{2^2}.$$

于是取 $p_1=n_2-n_1$, 则有

$$|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2}|<1.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{3^2}$, 则有 n_3 存在 (可取 $n_3>n_2$), 对于一切正整数 p_3,

$$|a_{n_3+1}+\cdots+a_{n_3+p_3}|<\frac{1}{3^2}.$$

于是取 $p_2=n_3-n_2$, 则有

$$|a_{n_2+1}+\cdots+a_{n_3}|<\frac{1}{2^2}.$$

继续这个过程, 则得

$$|a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_{k+1}}|<\frac{1}{k^2}\quad(k=1,2,\cdots).$$

考虑级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty}a_n$. 令 $b_k=a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_{k+1}}$, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 就是在级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty}a_n$ 中将 $a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_{k+1}}$ 加上括号而得到的.

比较级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ 与级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 的一般项, 由于 $|b_k|<\frac{1}{k^2}$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 绝对收敛. 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 系由级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty}a_n$ 加括号而得, 故可将级数 $\sum_{n=n_1+1}^{\infty}a_n$ 加上括号后变为绝对收敛级数, 从而可将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 适当加上括号, 使其变为绝对收敛级数.

34. 存在一个收敛级数 $\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$, 使其任何部分和 $s_n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ $(n\geqslant 1)$ 都有 n 个不同的零点.

下面的构造法属于 Gould[45].

当 $n=1$ 时, 方程 $a_0+a_1x=0$ 有实根 $x=-\frac{a_0}{a_1}$.

设具有正系数的 n 次方程

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$$

具有 n 个不同的实根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$, 则方程

$$a_nx+a_{n-1}x^2+\cdots+a_0x^{n+1}=0$$

有 $n+1$ 个不同的实根

$$r_1^{-1},r_2^{-1},\cdots,r_n^{-1},0. \tag{1}$$

因方程的根是系数的连续函数, 故方程

$$a_{n+1}+a_nx+\cdots+a_0x^{n+1}=0$$

对充分小的正数 a_{n+1}, 其 $n+1$ 个根可以任意接近 (1), 因而也是不同的实根. 又, 它们的倒数是方程

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}=0$$

的根. 对于 $n=1,2,\cdots$, 我们逐次选取足够小的正数 a_{n+1}, 使方程

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}=0$$

有 $n+1$ 个不同的实根, 并保证级数 $\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ 收敛, 于是, 我们得到了一个收敛级数 $\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$, 其任何 n 部分和

$$s_n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

都有 n 个不同的零点.

35. $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数 f, 使 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散.

在各个整数 $n>1$, 令 $g(n)=1$, 在闭区间 $[n-n^{-2},n]$ 和 $[n,n+n^{-2}]$ 的内部, 定义 g 是线性的, 而在区间的非整数端点, g 取 0. 最后, 在 $x\geqslant 1$ 而 g 尚未定义的点, 规定 $g(x)$ 的值为 0. 于是, 函数

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{x^2}$$

当 $x \geqslant 1$ 时是正值连续函数, 且

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^{+\infty} g(x)dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1 < +\infty,\end{aligned}$$

即 f 在 $[1,+\infty)$ 上广义可积. 但是, 等式

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

并不成立, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

36. $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数 f, 使 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

对于各个整数 $n>1$, 设 $g(n)=0$; 在闭区间 $[n-n^{-1},n]$ 和 $[n,n+n^{-1}]$ 的非整数端点处, 定义 g 的值等于 1; 而在这些闭区间内部, g 是线性的; 最后, 在 $[1,+\infty)$ 上 g 还没有确定值的点处, $g(x)$ 都定义为 1. 于是

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

是 $[1,+\infty)$ 上的正值连续函数, 而

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

注 我们有如下的级数敛散的积分检验法: 如果 f 是 $[1,+\infty)$ 上的非负的不增函数, 那么广义积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 本章反例 35 与反例 36 说明了在级数敛散的积分检验法中, 函数的非负不增性不能代以正值连续性.

37. 广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛而在每个区间 $[a,+\infty)(a>0)$ 上无界的非负连续函数.

做函数 f : 当 $x=n$ $(n>1)$ 时, $f(x)=n$; 在闭区间 $[n-n^{-3},n]$ 和 $[n,n+n^{-3}]$ 的内部, 定义 f 是线性的; 而在区间 $[n-n^{-3},n]$ 和 $[n,n+n^{-3}]$ 的非整数端点, f 取 0. 最后, 在 $x>0$ 而 f 尚未定义的点, 规定 $f(x)$ 的值为 0. 于是, f 为 $(0,+\infty)$ 上的非负连续函数. 又

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-3}\cdot n = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-2} < +\infty,$$

即 f 在 $(0,+\infty)$ 上广义可积. 然而, 对任意实数 $a>0, f$ 在 $[a,+\infty)$ 上无界.

第六章　一 致 收 敛

基本概念和主要结果

设 f 和 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 都是在点集 D 上有定义的函数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 都可以找到 $n_0\in N$, 使对一切 $n\geqslant n_0$ 及一切 $x\in D$, 都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上**一致收敛**于 f.

对于在 D 上有定义的函数 $u_n(x)$ 组成的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 若其部分和 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 所组成的函数列 $\{s_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $s(x)$, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上**一致收敛**于 $s(x)$.

若对任意开区间 $(\alpha,\beta)\subset D, \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (α,β) 上不一致收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上**无处一致收敛**.

一致收敛的 Cauchy 准则　函数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 在 D 上一致收敛的充要条件是, 对任意 $\varepsilon>0$, 可得 $n_0=n_0(\varepsilon)\in N$, 使对一切 $m>n\geqslant n_0$ 及任意的 $x\in D$, 都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

Weierstrass 判别法　若对充分大的 n, 恒有实数 a_n, 使得 $|u_n(x)|\leqslant a_n$ 对 D 上任意的 x 都成立, 并且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

Abel 判别法　如果 (i) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 D 上一致收敛; (ii) 对每一固定的 $x\in D, b_n(x)$ 随 n 而单调, 且对任意 $x\in D$ 和 n, 有 $|b_n(x)|\leqslant M$ (不依赖于 x 和 n 的定数), 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

Dirichlet 判别法　如果 (i) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$ 在 D 上一致有界; (ii) 对每一 $x\in D, b_n(x)$ 随 n 而单调, 并且函数列 $\{b_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零; 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

和函数的连续性定理　若每一个 $u_n(x)$ 都是点集 D 上的连续函数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 又是在 D 上一致收敛的, 则 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是在 D 上的连续函数.

若每一个 $f_n(x)$ 都是 D 上的连续函数, 又 $\{f_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 也是 D 上的连续函数.

逐项积分定理 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是在 $[a,b]$ 上可积的函数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则其和 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且可以逐项积分, 即

$$\int_a^b s(x)dx=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 并且可以逐项积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

逐项微分定理 若每一个 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上都有连续的导数 $u_n'(x)$, 并且由导数 $u_n'(x)$ 所组成的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛时, 其和 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 并且可以逐项微分, 即

$$s'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

若 $f_n(x)$ 都在 $[a,b]$ 上有连续的导数 $f_n'(x)$, 又 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则当 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$ 时, $f(x)$ 也是可微的, 并且

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

问　　题

1. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上收敛而非一致收敛.

证 因为

$$\begin{aligned}\left|\sin\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right| &= \left|\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\cos\frac{x}{2}-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right| \leqslant 1,\end{aligned}$$

故当 $0<x<2\pi$ 时有

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\sin nx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

而 $\frac{1}{n} \to 0\ (n \to \infty)$, 故由 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $0 < x < 2\pi$ 中处处收敛. 而当 $x = 0$ 或 $x = 2\pi$ 时, 级数的收敛性是显然的, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上收敛.

另一方面, 取 $x_m = \frac{\pi}{4m} \in [0, 2\pi]$, 则

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{4m}}{n} \geqslant \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{\sin \dfrac{\pi}{4}}{2m} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

故由 Cauchy 准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上非一致收敛.

2. 设函数 f_0 在 $[0, a]\ (a > 0)$ 上可积, 且

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

证明函数列 $\{f_n\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛.

证　因 f_0 在 $[0, a]$ 上可积, 故存在 M 使 $|f_0(x)| \leqslant M$. 于是, 对任意 $x \in [0, a]$ 有

$$\begin{aligned}
&|f_1(x)| = \left| \int_0^x f_0(t)dt \right| \leqslant \int_0^x |f_0(t)|dt \leqslant Mx, \\
&|f_2(x)| \leqslant \int_0^x |f_1(t)|dt \leqslant \frac{x^2}{2!} M, \\
&\cdots\cdots, \\
&|f_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!} M \leqslant \frac{a^n}{n!} M.
\end{aligned}$$

由级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} M$ 的收敛性得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} M = 0,$$

故 $\{f_n\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 0.

3. 设 $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cos\left(x + \frac{k}{n}\right)$. 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证　把区间 $[x, x+1]$ n 等分, 则 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cos\left(x + \frac{k}{n}\right)$ 是函数 $\cos t$ 在区间 $[x, x+1]$ 上的积分和, 故对每一 x, 有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cos\left(x + \frac{k}{n}\right) = \int_x^{x+1} \cos t dt.$$

因为

$$\begin{aligned}\left|f_n(x)-\int_x^{x+1}\cos t dt\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(x+\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=1}^{n}\int_{x+\frac{k-1}{n}}^{x+\frac{k}{n}}\cos t dt\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x+\frac{k-1}{n}}^{x+\frac{k}{n}}\left[\cos\left(x+\frac{k}{n}\right)-\cos t\right]dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{x+\frac{k-1}{n}}^{x+\frac{k}{n}}\frac{2}{n}dt=\frac{2}{n}\to 0 \quad (n\to\infty),\end{aligned}$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $\int_x^{x+1}\cos t dt$.

4. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 令

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

证明 $\{f_n\}$ 在任何有界闭区间上一致收敛.

证 记 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数为 $F(x)$, 则

$$\begin{aligned}F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}}f(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\xi_i}{n}\right) \quad (0<\xi_i<1, i=0,1,2,\cdots,n-1).\end{aligned}$$

设任意有界闭区间为 $[a,b]$, 因 f 在 $[a,b+1]$ 上连续, 故它在 $[a,b+1]$ 上一致连续, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 对于 $[a,b+1]$ 中的任意点 x' 及 x'', 只要 $|x'-x''|<\delta$ 就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

今取 $n_0=\left(\frac{1}{\delta}\right)+1$, 则当 $n>n_0, a\leqslant x\leqslant b$ 时, 就有

$$\left|\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\xi_i}{n}\right)-\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\delta,$$

且 $x+\frac{i}{n}\in[a,b+1], x+\frac{i}{n}+\frac{\xi_i}{n}\in[a,b+1]$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$. 于是

$$|F(x)-f_n(x)|=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left|f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\xi_i}{n}\right)-f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\varepsilon=\varepsilon.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 F.

5. 设 f_n $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_n'(x)|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$. 又 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 的每一点处收敛. 证明 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证法 1 (反证法) 设 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x \in [a,b]$. 假如 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意 n_0, 均有 $n > n_0$ 及 $x_n \in [a,b]$ 而有

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

不妨设 $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, 则 $x_0 \in [a,b]$. 因

$$\begin{aligned}|f_n(x_0) - f(x_0)| &= |f_n(x_0) - f_n(x_n) + f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x_0)|\\ &\geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| - |f_n(x_n) - f_n(x_0)| - |f(x_n) - f(x_0)|,\end{aligned}$$

由微分中值定理,

$$|f_n(x_n) - f_n(x_0)| = |f_n'(\xi)||x_n - x_0|,$$

再由题设条件及 $x_n \to x_0$, 可使上述右端小于 $\frac{\varepsilon_0}{3}$, 同样有

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

成立 (这是由于 $|f_n(y) - f_n(x)| \leqslant M|y - x|$, 取极限即得 $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$). 从而对一切 n_0, 都有 $n > n_0$ 使

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{3} - \frac{\varepsilon_0}{3} = \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

这与 $\{f_n\}$ 在 x_0 处收敛发生矛盾. 故 $\{f_n\}$ 必一致收敛于 f.

证法 2 任给 $\varepsilon > 0$, 对于 $[a,b]$ 中的任一点 x_0, 存在 $N(\varepsilon, x_0)$, 使得 $m > n > N(\varepsilon, x_0)$ 时, 有

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta(x_0) = \frac{\varepsilon}{4M}$, 则对任意 $x \in (x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0))$, 恒有

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leqslant |f_m(x) - f_n(x) - f_m(x_0) + f_n(x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\\ &= |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)||x - x_0| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\\ &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

显然, 开区间族 $\{(x - \delta(x), x + \delta(x)) : x \in (a,b)\}$ 覆盖了 $[a,b]$, 据有限覆盖定理知存在有限个开区间 $(x_1 - \delta(x_1), x_1 + \delta(x_1)), \cdots, (x_k - \delta(x_k), x_k + \delta(x_k))$, 它们覆盖了 $[a,b]$. 取 $n_0 = \max\{N(\varepsilon, x_i)\}$, 则当 $m > n > n_0$ 时, 对任何 $x \in [a,b]$ 都有

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

所以 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

6. 设 $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1$. 证明 $\{f_n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上没有一致收敛的子列.

证 对任一 $x_0 \in [0,1]$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0.$$

故 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 $f \equiv 0$. 另一方面, 若取 $x_n = \frac{1}{n}$, 则

$$f_n(x_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1,$$

可见 $\{f_n\}$ 的任何子列在 $[0,1]$ 上均不一致收敛.

7. 设 f 是闭区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上的连续函数, 并且满足不等式 $|f(x)| < |x|$, 当 $x \neq 0$ 时. 定义

$$f_1(x) = f(x), \quad f_2(x) = f[f_1(x)], \quad \cdots, \quad f_{n+1}(x) = f[f_n(x)] \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

证明 $\{f_n\}$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于 0.

证 因 $x \neq 0$ 时 $|f(x)| < |x|$, 且 f 连续, 故

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

因此, 对所有的 $x \in [-a,a]$, 都有 $|f(x)| \leqslant |x|$.

任给 $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < a)$, 在 $[-a,-\varepsilon] \cup [\varepsilon, a]$ 上, 连续函数 $|\frac{f(x)}{x}|$ 达到最大值 M. 因为在 $[-a,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,a]$ 上, $|\frac{f(x)}{x}| < 1$, 故 $M < 1$. 因此

$$|f(x)| \leqslant M|x| \leqslant Ma \quad (x \in [-a,-\varepsilon] \cup [\varepsilon, a]).$$

在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上, $|f(x)| \leqslant |x| < \varepsilon$. 所以

$$|f(x)| \leqslant \max\{Ma, \varepsilon\}, \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

即

$$|f_1(x)| \leqslant \max\{Ma, \varepsilon\}.$$

假设

$$|f_n(x)| \leqslant \max\{M^n a, \varepsilon\},$$

当 $x \in [-a,-\varepsilon] \cup [\varepsilon, a]$ 时,

$$|f_{n+1}(x)| \leqslant M|f_n(x)| \leqslant M^{n+1}a.$$

而当 $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 时,

$$|f_{n+1}(x)| \leqslant |f_n(x)| < \varepsilon.$$

即 $|f_{n+1}(x)| \leqslant \max\{M^{n+1}a, \varepsilon\}$. 由归纳法知对一切 $x \in [-a,a]$, 都有

$$|f_n(x)| \leqslant \max\{M^n a, \varepsilon\}.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于 0.

8. 设 $\{\alpha_n\}$ 为数列, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ 或 } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\\ \alpha_n, & x=\dfrac{1}{2n},\\ \text{线性}, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2n} \text{ 或 } \dfrac{1}{2n}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

问: (i) $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上是否处处收敛?

(ii) 为使 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 当且仅当 $\{\alpha_n\}$ 满足什么条件?

(iii) 为使

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$

成立, 当且仅当 $\{\alpha_n\}$ 满足什么条件?

解 (i) 显然, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 $f\equiv 0$.

(ii) 因 $r_n=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-0|=\alpha_n$, 故为使 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f\equiv 0$, 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

(iii) 因为 $\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{\alpha_n}{2n}$, 所以为使

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

成立, 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{2n}=0$.

9. 设 $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$ $(n=1,2,\cdots)$, 问: 当 α 为什么值时,

(i) $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛?

(ii) $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛?

(iii) 等式 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$ 成立?

解 (i) 当 $x=0$ 时, $f_n(x)=0$ $(n=1,2,\cdots)$; 而当 $0<x\leqslant 1$ 时, 对任意实数 α, 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}n^\alpha xe^{-nx}=0.$$

因此, 对任何实数 $\alpha, \{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 $f\equiv 0$.

(ii) 因 $f_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$, 故可知 $x_n=\frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值点, 从而

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}e^{-1},\quad x\in[0,1].$$

由此可见, 当 $\alpha<1$ 时, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零; 而当 $\alpha\geqslant 1$ 时, $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于零.

(iii) 因 $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2}(1-e^{-n}-ne^{-n}),$$

故当 $\alpha < 2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

而当 $\alpha \geqslant 2$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

10. 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 又, $\{x_n\} \subset [a,b]$ 且 $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

证 因 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 n_1, 使当 $n > n_1$ 时, 对一切 $x \in [a,b]$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

特别有

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由题设知 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 知存在 n_2, 使当 $n > n_2$ 时, 有 $|x_n - x_0| < \delta$. 取 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, 则当 $n > n_0$ 时,

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

11. **(Dini 定理)** 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且对于任意 $x \in [a,b]$, 有 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. 证明: 如果 $\{f_n\}$ 收敛于连续函数 f, 那么 $\{f_n\}$ 必定一致收敛于 f.

证法 1 任给 $\varepsilon > 0$ 及 $x_0 \in [a,b]$, 因为 $\{f_n(x_0)\}$ 单调增加且收敛于 $f(x_0)$, 故有正整数 N_{x_0}, 使当 $n \geqslant N_{x_0}$ 时,

$$0 \leqslant f(x_0) - f_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因 f 与 $f_{N_{x_0}}$ 都在点 x_0 连续, 故又有 $\delta_{x_0}>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta_{x_0}$ 且 $x\in[a,b]$ 时, 有

$$|f(x_0)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$|f_{N_{x_0}}(x_0)-f_{N_{x_0}}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而得到当 $|x-x_0|<\delta_{x_0}$ 且 $x\in[a,b], n\geqslant N_{x_0}$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f(x)-f_n(x)|&\leqslant|f(x)-f_{N_{x_0}}(x)|\\&\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)-f_{N_{x_0}}(x_0)|\\&\quad+|f_{N_{x_0}}(x_0)-f_{N_{x_0}}(x)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

记 $\Delta_{x_0}=\{x:|x-x_0|<\delta_{x_0}\}$, 则开区间族 $\{\Delta_{x_0}:x_0\in[a,b]\}$ 就覆盖了闭区间 $[a,b]$. 据有限覆盖定理便知可从中选出有限多个 $\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\cdots,\Delta_{x_k}$, 使

$$[a,b]\subset\bigcup_{j=1}^{k}\Delta_{x_j}.$$

按 Δ_{x_j} 的选法, 知有相应的 δ_{x_j} 和 N_{x_j}, 当 $x\in\Delta_{x_j}\cap[a,b]$ 且 $n\geqslant N_{x_j}$ 时,

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

令 $n_0=\max_{1\leqslant j\leqslant k}\{N_{x_j}\}$, 则当 $n\geqslant n_0, x\in[a,b]$ 时, 有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

故 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

证法 2 (反证法) 若 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 f, 则有 $\varepsilon_0>0$, 对每个正整数 n, 都有 $x_n\in[a,b]$, 使得

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

考虑数列 $\{x_n\}$, 因它有界, 故有收敛子列. 为简单起见, 不妨设它本身就收敛于 x_0. 因 $f_n(x_0)\to f(x_0)$ $(n\to\infty)$, 故有 n_0, 使 $|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon_0$. 再由 $f_{n_0}(x)-f(x)$ 的连续性以及 $x_n\to x_0$, 可知有 n_1, 当 $n>n_1$ 时 $|f_{n_0}(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon_0$. 由于 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant f(x)$, 故当 $n>\max\{n_0,n_1\}$ 时, 有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\leqslant|f_{n_0}(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon_0.$$

这与 $|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾.

12. 设对每一 n, f_n 是 $[a,b]$ 上的单调函数. 证明: 如果函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 f, 那么它必一致收敛于 f.

证　对任给的 $\varepsilon > 0$, 因 f 在 $[a,b]$ 上连续, 故一致连续, 从而有 $\delta > 0$, 使当 $x', x'' \in [a,b]$ 且 $|x'-x''| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

取正整数 k, 使 $\frac{b-a}{k} < \delta$. 将 $[a,b]$ 等分成 k 分, 记分点为 $a = x_0, x_1, \cdots, x_k = b$, 则只要 x', x'' 同属于某个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, (1) 式就成立. 任取 j $(0 \leqslant j \leqslant k)$, 因 $\{f_n(x_j)\}$ 收敛于 $f(x_j)$, 故有正整数 N_j, 使当 $n > N_j$ 时, 便有

$$|f_n(x_j) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $n_0 = \max\{N_0, N_1, \cdots, N_k\}$, 则当 $n > n_0$ 时, 便有

$$|f_n(x_j) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (j = 0, 1, \cdots, k). \tag{2}$$

对于任意 $x \in [a,b]$, 存在正整数 j, 使 $x \in [x_{j-1}, x_j]$. 因诸 $f_n(x)$ 是单调函数, 故有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \max\{|f_n(x_{j-1}) - f(x)|, |f_n(x_j) - f(x)|\}. \tag{3}$$

而由 (1) 与 (2), 又知当 $n > n_0$ 时, 有

$$|f_n(x_{j-1}) - f(x)| \leqslant |f_n(x_{j-1}) - f(x_{j-1})| + |f(x_{j-1}) - f(x)| < \varepsilon, \tag{4}$$

$$|f_n(x_j) - f(x)| \leqslant |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

从而由 (3), (4) 与 (5) 得到

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad 当\ n > n_0, a \leqslant x \leqslant b.$$

故 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

13. 设每个函数 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 在点 $x = c$ 处连续, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 发散. 证明: 对任意 $\delta > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(c, c+\delta)$ 内不一致收敛.

证 (反证法)　若存在 $\delta > 0$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(c, c+\delta)$ 内一致收敛, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 当 $n > n_0$ 时, 对一切正整数 p, 有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad x \in (c, c+\delta).$$

因 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 c 点连续, 故令 $x \to c$, 便得

$$|u_{n+1}(c) + u_{n+2}(c) + \cdots + u_{n+p}(c)| \leqslant \varepsilon.$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$ 收敛, 这与题设矛盾.

14. 设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上正的递减 (即 $u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x)$) 且收敛于零的函数列. 每个 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的递增函数. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证　令 $v_n(x) = (-1)^{n-1}$, 则

$$|v_1(x) + v_2(x) + \cdots + v_n(x)| \leqslant 1.$$

因为 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的递增函数, 故对任意 $x \in [a,b]$, 有

$$0 < u_n(x) \leqslant u_n(b) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

又因为 $\{u_n(b)\}$ 收敛于零, 故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 当 $n > n_0$ 时有

$$|u_n(b)| < \varepsilon.$$

于是, 当 $n > n_0$ 时, 对一切 $x \in [a,b]$ 有

$$|u_n(x)| < \varepsilon.$$

即 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

由题设还知 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上递减, 故据 Dirichlet 判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

15. 设函数 f 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续. 证明:

(i) $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上收敛.

(ii) $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上一致收敛的充要条件是 f 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上有界, 且 $f(1) = 0$.

证　(i) 当 $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = 0;$$

而当 $x = 1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = f(1).$$

故 $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上收敛, 其极限函数是

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1, \\ f(1), & x = 1. \end{cases}$$

(ii) 必要性: 设 $\{x^n f(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上一致收敛. 因 $x^n f(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续, 故其极限函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上也连续, 从而

$$f(1) = g(1) = \lim_{x\to 1-0} g(x) = 0.$$

充分性: 设 $f(1)=0$, 且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上有界, $|f(x)|\leqslant M$, 这时极限函数 $g(x)\equiv 0$. 考虑 $|x^nf(x)-0|$. 因 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta\left(0<\delta<\frac{1}{2}\right)$, 使当 $1-\delta<x\leqslant 1$ 时,

$$|f(x)-f(1)|=|f(x)|<\varepsilon.$$

从而当 $1-\delta<x\leqslant 1$ 时,

$$|x^nf(x)-0|\leqslant|f(x)|<\varepsilon.$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1-\delta$ 时, 因

$$|x^nf(x)-0|\leqslant(1-\delta)^nM,$$

而 $(1-\delta)^nM\to 0\ (n\to\infty)$, 故存在正整数 n_0, 使当 $n>n_0$ 时, 对一切 $x\in\left[\frac{1}{2},1-\delta\right]$, 有

$$|x^nf(x)-0|\leqslant(1-\delta)^nM<\varepsilon.$$

综上所述, 对以上的 $\varepsilon>0$, 存在如上的 n_0, 使当 $n>n_0$ 时, 对一切 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 有

$$|x^nf(x)-0|<\varepsilon.$$

由定义知 $\{x^nf(x)\}$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上一致收敛.

16. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 在 $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 上一致收敛.

证 令 $f(x)=x^n+x^{-n}$, 则

$$f'(x)=nx^{-n-1}(x^{2n}-1).$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时, $f'(x)<0$, 故 f 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上递减; 而当 $1<x\leqslant 2$ 时, $f'(x)>0$, 故 f 在 $(1,2]$ 上递增. 又

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=2^n+2^{-n},$$

故当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 时,

$$\max|f(x)|=\max f(x)=2^n+2^{-n}.$$

同理可证, 当 $-2\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,

$$\max|f(x)|=2^n+2^{-n}.$$

总之, 当 $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 时, $\max|f(x)|=2^n+2^{-n}$. 因此,

$$\begin{aligned}|u_n(x)|&=\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)\\&<\frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}.\end{aligned}$$

易证, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ 在 $\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 上一致收敛.

17. 设 E 是紧实数集. 证明: 若函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点有界, 即对每一 $x\in E$, 存在正数 M_x 而有 $|f_n(x)|\leqslant M_x$ $(n=1,2,\cdots)$, 且 $\{f_n\}$ 在 E 上等度连续, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对一切满足 $|x-y|<\delta$ 的 $x,y\in E$ 及任意 n 都有

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon,$$

则 $\{f_n\}$ 含有在 E 上一致收敛的子列.

证　因 E 是紧集, 故存在 E 的可数稠密子集 Q. 设

$$Q=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),$$

则 $\{f_n(x_1)\}$ 是有界数列, 故存在子列 $\{f_{n,1}\}$, 使 $\{f_{n,1}(x_1)\}$ 收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty}f_{n,1}(x_1)=A_1.$$

其次, 考虑数列 $\{f_{n,1}(x_2)\}$. 同样可抽出 $\{f_{n,1}\}$ 的子列 $\{f_{n,2}\}$, 使

$$\lim_{n\to\infty}f_{n,2}(x_2)=A_2.$$

继续这个过程, 我们得到子列 $\{f_{n,m}\}_{n=1}^{\infty}$ $(m=1,2,\cdots)$, 使

$$\lim_{n\to\infty}f_{n,m}(x_m)=A_m\quad(m=1,2,\cdots).$$

然后, 考虑对角线子列 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$. 对固定的 $k,\{f_{n,n}(x_k)\}_{n\geqslant k}$ 是 $\{f_{n,k}(x_k)\}_{n\geqslant k}$ 的子列, 故收敛于 A_k. 因而 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Q 的每个点都收敛.

任给 $\varepsilon>0$, 因 $\{f_n\}$ 在 E 上等度连续, 故存在 $\delta>0$, 当 $x,y\in E,|x-y|<\delta$ 时, 对 $n=1,2,\cdots$, 有

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因 E 是 Q 的闭包, E 是紧集, 故存在 Q 中的有限个点 $x_1,\cdots,x_p$, 使

$$E\subset J(x_1)\cup\cdots\cup J(x_p),$$

其中 $J(x_i)=(x_i-\delta,x_i+\delta)$ $(i=1,\cdots,p)$. 取正整数 n_0, 使 $n\geqslant n_0,m\geqslant n_0$ 时, 对 $i=1,2,\cdots,p$, 有

$$|f_{n,n}(x_i)-f_{m,m}(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 对任意 $x\in E$, 存在某个 x_i $(1\leqslant i\leqslant p)$, 使 $x\in J(x_i)$. 因此, 当 $m,n\geqslant n_0$ 时,

$$\begin{aligned}|f_{n,n}(x)-f_{m,m}(x)|\leqslant&|f_{n,n}(x)-f_{n,n}(x_i)|\\&+|f_{n,n}(x_i)-f_{m,m}(x_i)|+|f_{m,m}(x_i)-f_{m,m}(x)|\\<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\{f_{n,n}\}$ 在 E 上一致收敛.

18. 设 $\{a_n\}$ 是单调减少的正数列. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在任何区间上一致收敛的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

证 必要性: 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在任何区间上都一致收敛, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 使当 $n > n_0$ 时,

$$|a_n \sin nx + a_{n+1}\sin(n+1)x + \cdots + a_{2n}\sin 2nx| < \varepsilon$$

对任何 x 都成立. 特别取 $x = \frac{1}{2n}$, 则

$$0 < a_n \sin\frac{1}{2} + a_{n+1}\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) + \cdots + a_{2n}\sin 1 < \varepsilon.$$

因 $\{a_n\}$ 是单调减少的正数列, 故

$$0 < na_{2n}\sin\frac{1}{2} < a_n \sin\frac{1}{2} + \cdots + a_{2n}\sin 1 < \varepsilon,$$

因而 $2na_{2n} \to 0\ (n\to\infty)$. 同理可证 $(2n+1)a_{2n+1} \to 0\ (n\to\infty)$. 所以 $na_n \to 0\ (n \to \infty)$.

充分性: 设 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. 命 $\mu_n = \sup_{m\geqslant n}\{ma_m\}$, 则 $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 0$. 记

$$s_{n,m} = a_n \sin nx + a_{n+1}\sin(n+1)x + \cdots + a_m \sin mx,$$

我们证明对任意 x 及 $m > n$, 均有

$$|s_{n,m}| \leqslant (\pi+1)\mu_n. \tag{1}$$

因 $s_{n,m}$ 是周期 2π 的奇函数, 故只需证明在 $[0,\pi]$ 上 (1) 成立就行了. 把区间 $[0,\pi]$ 分成 $\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$, $\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right]$, $\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$, 现证 (1) 在这三个区间上都成立.

(i) $\frac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi$. 由于

$$\begin{aligned}|\sin nx + \cdots + \sin rx| &= \left|\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(r+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{\pi}{x}.\end{aligned}$$

于是由 Abel 引理, 即得

$$\begin{aligned}|s_{n,m}| &= |a_n \sin nx + \cdots + a_m \sin mx| \\ &\leqslant a_n\frac{\pi}{x} \leqslant na_n \leqslant \mu_n.\end{aligned}$$

(ii) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{m}$. 因 $\sin\theta \leqslant \theta$, 故

$$\begin{aligned}|s_{n,m}| &\leqslant a_n nx + \cdots + a_m mx \\ &\leqslant m\mu_n x \leqslant \pi\mu_n.\end{aligned}$$

(iii) $\frac{\pi}{m} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}$. 这时 $n \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant m$, 命 $k = \left[\frac{\pi}{x}\right]$, 并把 $s_{n,m}$ 分成两段:

$$\begin{aligned} s_{n,m} &= a_n \sin nx + \cdots + a_k \sin kx + a_{k+1} \sin(k+1)x + \cdots + a_m \sin mx \\ &= s_{n,k} + s_{k+1,m}. \end{aligned}$$

对于第一个和, 因 $x \leqslant \frac{\pi}{k}$, 故由 (ii) 知 $|s_{n,k}| \leqslant \pi\mu_n$. 对于第二个和, 因 $x > \frac{\pi}{k+1}$, 故由 (i) 知 $|s_{k+1,m}| \leqslant \mu_n$. 于是有

$$|s_{n,m}| \leqslant |s_{n,k}| + |s_{k+1,m}| \leqslant (\pi+1)\mu_n.$$

综上所述, 便知 (1) 成立. 于是由 $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$, 可知原级数在任何区间上一致收敛.

19. 设区间 I 上的函数列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

(i) $|f_0(x)| \leqslant M$;

(ii) $\sum_{n=0}^{m} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant M \ (m = 1, 2, \cdots)$, 其中 M 是常数. 又设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证　由题设知对任意 n 及 $x \in I$, 都有

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(x) - f_{n+k+1}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n+p} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + |f_0(x)| \leqslant 2M, \\ |f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| + |f_0(x)| \leqslant 2M, \end{aligned}$$

其中 $p = 1, 2, \cdots$.

任给 $\varepsilon > 0$, 因 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 故存在 n_0, 使 $n > n_0$ 时

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad (p = 1, 2, \cdots).$$

于是由 Abel 变换可知, 当 $n > n_0$ 时对一切 $x \in I$ 都有

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k} f_{n+k}(x)\right| \\ &= \left|\left(\sum_{k=0}^{p} a_{n+k}\right) f_{n+p}(x) + \sum_{i=0}^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{i} a_{k+n}\right)(f_{n+i}(x) - f_{n+i+1}(x))\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{p} a_{n+k}\right| |f_{n+p}(x)| + \sum_{i=0}^{p-1}\left|\sum_{k=0}^{i} a_{k+n}\right| |f_{n+i}(x) - f_{n+i+1}(x)| \\ &\leqslant 2M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}2M = \varepsilon. \end{aligned}$$

据 Cauchy 准则, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

20. 设 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续可微, 且 $f(0)=0, f'(x)\geqslant 0, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(x^n)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛.

证　令 $b_n(x)=f(x^n), a_n=(-1)^{n-1}$. 易知对每一 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right], \{b_n(x)\}$ 单调减少. 又

$$|b_n(x)|<f\left(\frac{1}{2^n}\right)\to 0,\quad x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],$$

故 $\{b_n(x)\}$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于零. 据 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(x^n)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

21. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛, 证明在适当加括号以后, 把每个括号内算作一项, 可使新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ 在 (a,b) 上绝对一致收敛.

证　任给 $\varepsilon>0$, 存在正整数 n_0, 使 $m>n>n_0$ 时, 对一切 $x\in(a,b)$ 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}f_k(x)\right|<\varepsilon.$$

特别取 $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$, 存在 N_1, 使对一切 $x\in(a,b)$ 有

$$\left|\sum_{k=N_1+1}^{N_1+p}f_k(x)\right|<\frac{1}{2}\quad(p=1,2,\cdots).$$

现取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$, 存在 $N_2>N_1$, 使对一切 $x\in(a,b)$ 有

$$\left|\sum_{k=N_2+1}^{N_2+p}f_k(x)\right|<\frac{1}{2^2},\quad p=1,2,\cdots.$$

一般有 $N_k>N_{k-1}$, 使对一切 $x\in(a,b)$ 有

$$\left|\sum_{i=N_k+1}^{N_k+p}f_i(x)\right|<\frac{1}{2^k}\quad(p=1,2,\cdots).$$

于是取 $|F_1(x)|=|f_1(x)+\cdots+f_{N_2}(x)|$,

$$|F_k(x)|=\left|\sum_{i=N_k+1}^{N_{k+1}}f_i(x)\right|\quad(k=2,3,\cdots),$$

由 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|F_n(x)|$ 在 (a,b) 上绝对一致收敛.

22. **(Weierstrass 逼近定理)**　设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明对任意 $\varepsilon>0$, 存在多项式 p, 使对一切 $x\in[a,b]$, 有

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon.$$

证　下面的证明属于苏联数学家 Bernshteĭn 院士.

引理　对所有实数 x,

$$\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\leqslant\frac{n}{4}.$$

证　考虑二项式

$$(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^py^{n-p}.$$

关于 x 微分, 再乘以 x, 得

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p}x^py^{n-p}.$$

类似地, 把这个二项式关于 x 微分两次再乘以 x^2 得

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n}p(p-1)\binom{n}{p}x^py^{n-p}.$$

于是, 若令

$$r_p(x)=\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p},$$

则有

$$\sum_{p=0}^{n}r_p(x)=1,\quad \sum_{p=0}^{n}pr_p(x)=nx,$$
$$\sum_{p=0}^{n}p(p-1)r_p(x)=n(n-1)x^2.$$

因而

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2r_p(x)&=n^2x^2\sum_{p=0}^{n}r_p(x)-2nx\sum_{p=0}^{n}pr_p(x)+\sum_{p=0}^{n}p^2r_p(x)\\&=n^2x^2-2nx[nx]+[nx+n(n-1)x^2]\\&=nx(1-x).\end{aligned}$$

但 $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0$, 故 $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$, 从而得到

$$\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\leqslant\frac{n}{4}.$$

定义 设 f 是定义在区间 $[0,1]$ 上的实值函数. 由

$$B_n(f;x)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f\left(\frac{p}{n}\right)x^p(1-x)^{n-p},\quad x\in[0,1],$$

定义的函数 $B_n(f)$ 叫作函数 f 的 n **阶 Bernshteĭn 多项式.** $B_n(f)$ 是次数 $\leqslant n$ 的多项式.

Bernshteĭn 多项式关于函数 f 是线性的, 即, 若 a_1,a_2 是常数, $f=a_1f_1+a_2f_2$, 则

$$B_n(f)=a_1B_n(f_1)+a_2B_n(f_2).$$

由于在 $[0,1]$ 上

$$\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}\geqslant 0,$$

并且

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}=[x+(1-x)]^n=1,\tag{1}$$

故当在 $[0,1]$ 上 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 时有

$$m\leqslant B_n(f;x)\leqslant M.$$

定理 (Bernshteĭn) 对 $[0,1]$ 上的任意连续函数 f, $\{B_n(f)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f.

证 设在 $[0,1]$ 上 $|f(x)|\leqslant M<+\infty$. 由 f 的一致连续性, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使 $|x-x'|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

任取 $x\in[0,1]$, 由 (1) 有

$$f(x)=\sum_{p=0}^{n}f(x)\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p},$$

因此

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leqslant\sum_{p=0}^{n}\left|f\left(\frac{p}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{p}x^p(1-x)^{n-p}.\tag{2}$$

把数 $p=0,1,2,\cdots$ 如下地分成两类 A 与 B:

$$\text{当}\ \left|\frac{p}{n}-x\right|<\delta\ \text{时}\ p\in A;$$
$$\text{当}\ \left|\frac{p}{n}-x\right|\geqslant\delta\ \text{时}\ p\in B.$$

则当 $p \in A$ 时有

$$\left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

因而由 (1) 得

$$\begin{aligned}\sum_{p\in A}\left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} &< \varepsilon \sum_{p\in A}\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} = \varepsilon. \qquad (3)\end{aligned}$$

当 $p \in B$ 时有

$$\frac{(p-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1,$$

因而由上述引理得

$$\begin{aligned}\sum_{p\in B}\left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} &\leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p\in B}(p-nx)^2\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} \\ &\leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{p=0}^{n}(p-nx)^2\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} \\ &\leqslant \frac{M}{2n\delta^2}. \qquad (4)\end{aligned}$$

结合 (2), (3), (4), 我们看到: 对任一 $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

而这就是说, 只要 $n > \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$, 便有

$$|B_n(f;x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

兹证 Weierstrass 逼近定理. 若 $[a,b] = [0,1]$, 则它是上述定理的直接结果. 设 $[a,b] \neq [0,1]$. 考虑 y 的函数 $f(a+y(b-a))$. 这个函数在 $[0,1]$ 上有定义、连续, 因此存在多项式 $Q(y)$, 使对所有 $y \in [0,1]$ 有

$$|f(a+y(b-a)) - Q(y)| < \varepsilon.$$

当 $x \in [a,b]$ 时, $\frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$. 于是

$$\left| f(x) - Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon.$$

因而多项式 $P(x) = Q(\frac{x-a}{b-a})$ 即为所求.

注　当 $0 < a < b < 1$ 时 Weierstrass 逼近定理也成立.

23. 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明: f 容许由有理系数多项式一致逼近.

证 任给 $\varepsilon>0$, 由 Weierstrass 逼近定理, 存在多项式 P, 使得

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

其中 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是实数. 令 $c=\max\{|a|,|b|\}$, 对每个 $i(0\leqslant i\leqslant n)$, 取有理数 b_i 使

$$|b_i-a_i|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)c^i}.$$

并设

$$Q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n,$$

则

$$|P(x)-Q(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}(b_i-a_i)x^i\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-Q(x)|<\varepsilon.$$

24. 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明存在单调递减的多项式列 $\{P_n\}$, 它在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

证 设 $\{e_n\}$ 是适合 $\sum_{n=1}^{\infty}e_n=1$ 的任一正数列. 由 Weierstrass 逼近定理, 存在多项式列 $\{P_n\}$, 使对所有 $x\in[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)+\left(1-\frac{1}{2}e_1\right)-P_1(x)\right|<\frac{1}{2}e_1,\\
&\left|f(x)+\left(1-e_1-\frac{1}{2}e_2\right)-P_2(x)\right|<\frac{1}{2}e_2,\\
&\cdots\cdots,\\
&\left|f(x)+\left(1-e_1-\cdots-e_{n-1}-\frac{1}{2}e_n\right)-P_n(x)\right|<\frac{1}{2}e_n.
\end{aligned}$$

令

$$f_0(x)=f(x)+1,\quad f_n(x)=f(x)+\left\{1-\sum_{k=1}^{n}e_k\right\}(n\geqslant 1),$$

我们有

$$f_0(x)\geqslant P_1(x)\geqslant f_1(x)\geqslant P_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f_n(x)\geqslant P_{n+1}(x)\geqslant\cdots,$$

而且 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f (显然, 对于单调递增多项式列的情况, 类似的结果也成立).

25. 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 并设

$$\int_a^b x^n f(x)dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

证明 $f \equiv 0$.

证 由 Weierstrass 逼近定理, f 容许用多项式 P 一致逼近. 因此, 对所有 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x) = P(x) + \varepsilon h(x),$$

其中 ε 是任意正实数, 且在 $[a,b]$ 上 $|h(x)| < 1$. 于是

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f(x)[P(x) + \varepsilon h(x)]dx.$$

但由假设

$$\int_a^b f(x)P(x)dx = 0.$$

从而

$$\int_a^b f^2(x)dx < \varepsilon \int_a^b |f(x)|dx,$$

由 ε 的任意性, 得到

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0,$$

故 $f \equiv 0$.

26. 设 f 在区间 (a,b) 上有连续的导数, 令

$$F_n(x) = \frac{n}{2}\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x - \frac{1}{n}\right)\right].$$

证明 (i) $\{F_n\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ $(a < \alpha < \beta < b)$ 上是一致收敛的; (ii) $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta F_n(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$.

证 存在正整数 n_0, 使

$$a < \alpha - \frac{1}{n_0} < \beta + \frac{1}{n_0} < b.$$

由于 f' 在 $[\alpha - \frac{1}{n_0}, \beta + \frac{1}{n_0}]$ 上连续, 因而也一致连续. 于是, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x' - x''| < \delta, x', x'' \in [\alpha - \frac{1}{n_0}, \beta + \frac{1}{n_0}]$ 时,

$$|f'(x') - f'(x'')| < \varepsilon.$$

取正整数 $N_0=\max\{[\frac{2}{\delta}]+1,n_0\}$, 当 $n>N_0$ 时, 对任意 $x\in[\alpha,\beta]$, 都有 $x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\in[\alpha-\frac{1}{n_0},\beta+\frac{1}{n_0}]$. 由 Lagrange 中值定理知

$$\begin{aligned}|F_n(x)-f'(x)|&=\left|\frac{n}{2}\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]-f'(x)\right|\\&=\left|\frac{n}{2}f'(\xi_n)\left(x+\frac{1}{n}-x+\frac{1}{n}\right)-f'(x)\right|\\&=|f'(\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

这里, $x-\frac{1}{n}<\xi_n<x+\frac{1}{n}$. 因此, $\{F_n\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 f'. 又当 n 充分大时 F_n 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 因此, 由逐项积分定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta F_n(x)dx=\int_\alpha^\beta f'(x)dx=f(\beta)-f(\alpha).$$

27. 证明: 函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上连续且可微, 但在 $(1,+\infty)$ 上不一致连续.

证 任取 $x_0>1$, 对任意 $x\in[x_0,+\infty)$, 有

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}\leqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{x_0}},$$

故级数 $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上一致收敛. 又因每一项 $\frac{1}{n^x}$ 连续, 故 $\zeta(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上连续. 由 $x_0>1$ 的任意性可知 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续.

因为 $\sum_{n=1}^\infty-\frac{\ln n}{n^x}$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上也是一致收敛的, 所以 $\zeta(x)$ 可以逐项求导数, 其中 $x_0>1$ 是任意的, 从而 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可微.

再证 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上并不一致连续, 对 $x>1$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^x}&=1+\frac{1}{2^x}+\left(\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}\right)+\left(\frac{1}{5^x}+\frac{1}{6^x}+\frac{1}{7^x}+\frac{1}{8^x}\right)+\cdots\\&>1+\frac{1}{2^x}+\frac{2}{4^x}+\frac{4}{8^x}+\cdots\\&=1+\frac{1}{2^x}\left(1+\frac{1}{2^{x-1}}+\frac{1}{4^{x-1}}+\cdots\right)\\&=1+\frac{1}{2^x-2}.\end{aligned}$$

因此, 当 $x\to1+0$ 时 $\zeta(x)\to+\infty$. 若 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致连续, 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-1|<\frac{\delta}{2},|x'-1|<\frac{\delta}{2}$ 时,

$$|\zeta(x)-\zeta(x')|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 准则知 $\lim_{x\to1+0}\zeta(x)$ 存在且有限, 这与 $\lim_{x\to1+0}\zeta(x)=+\infty$ 发生矛盾.

28. 设 $\{x_n\}\subset(0,1)$, 且当 $i\neq j$ 时, $x_i\neq x_j$. 试讨论函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$$

在 $(0,1)$ 内的连续性.

解 我们指出, 函数 f 于 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 处不连续, 而在 $(0,1)$ 中的其他点处连续. 为此, 记

$$f_n(x)=2^{-n}\operatorname{sgn}(x-x_n)\quad(n=1,2,\cdots),$$

对任意 $x\in(0,1)$, 因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 也收敛, 从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义.

对于任意正整数 n, 为证 f 在 x_0 处不连续, 我们记

$$f(x)=f_n(x)+\sum_{k\neq n}f_k(x)=f_n(x)+\widetilde{f}_n(x).\tag{1}$$

显然, f_n 在点 x_n 不连续, 而对 (1) 中的级数, 其每一项 f_k $(k\neq n)$ 在 x_n 连续, 又级数 $\sum_{k\neq n}f_k(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛, 从而 $\widetilde{f}_n$ 在点 x_n 连续. 由此可知, f 在 x_n 不连续.

对任意 $x_0\in(0,1)\backslash\{x_n\}$, 所有 f_n 在点 x_0 连续, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 f, 故 f 在点 x_0 连续.

29. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=F(x)$ 于 (a,b) 上处处收敛, 在任意闭区间 $[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$ 上一致收敛, f_n 在 (a,b) 上连续, 且有

$$|F_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\leqslant M,\quad x\in[a,b],n=1,2,\cdots.$$

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 可逐项积分.

证 易知 F 在 (a,b) 上连续, 由 $|F(x)|\leqslant M$ 知 F 在 $[a,b]$ 上可积.

任给 $\varepsilon>0$, 取 c,d 满足 $a<c<d<b$,

$$c-a<\frac{\varepsilon}{5(M+1)},\quad b-d<\frac{\varepsilon}{5(M+1)}.$$

在 $[c,d]$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛. 于是存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时

$$|F(x)-F_n(x)|<\frac{\varepsilon}{5(d-c)}.$$

因此,

$$\left|\int_a^b F(x)dx-\int_a^b F_n(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|F(x)-F_n(x)|dx\leqslant\int_a^c|F(x)-F_n(x)|dx$$
$$+\left|\int_o^d|F_n(x)-F(x)|dx+\int_d^b|F(x)-F_n(x)|dx\right.$$
$$\leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{5(M+1)}+\frac{\varepsilon}{5(d-c)}\cdot(d-c)$$
$$+2M\cdot\frac{\varepsilon}{5(M+1)}$$
$$<\varepsilon,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 可逐项积分.

30. 设函数列 $\{\varphi_n\}$ 满足如下条件:

(i) φ_n 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1\varphi_n(x)dx=1.$$

(ii) 对任何 $0<c<1,\{\varphi_n\}$ 在 $[-1,c]$ 及 $[c,1]$ 上一致收敛于零.

证明对在 $[-1,1]$ 上连续的函数 g, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^1 g(x)\varphi_n(x)dx=g(0).$$

证 由 (i) 知存在 M_1, 使 $\int_{-1}^1\varphi_n(x)dx<M_1$ $(n=1,2,\cdots)$. 又因 g 在 $[-1,1]$ 上连续, 故存在 M_2 使 $|g(x)|<M_2,x\in[-1,1]$.

任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(0<\delta<1)$, 使当 $|x|<\delta$ 时

$$|g(x)-g(0)|<\frac{\varepsilon}{2M_1}.$$

由于 $\{\varphi_n\}$ 在 $[-1,-\delta],[\delta,1]$ 上一致收敛于 0, 故存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时

$$0<\varphi_n(x)<\frac{\varepsilon}{8M_2},\quad x\in[-1,-\delta]\cup[\delta,1].$$

因此当 $n>n_0$ 时

$$\left|\int_{-1}^1 g(x)\varphi_n(x)dx-\int_{-1}^1\varphi_n(x)g(0)dx\right|$$
$$\leqslant\left|\int_{-1}^{\delta}\varphi_n(x)[g(x)-g(0)]dx\right|$$
$$+\int_{-\delta}^{\delta}|\varphi_n(x)|\cdot|g(x)-g(0)|dx+\left|\int_{\delta}^1\varphi_n(x)[g(x)-g(0)]dx\right|$$
$$\leqslant 2M_2\cdot\frac{\varepsilon}{8M_2}+M_1\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1}+2M_2\cdot\frac{\varepsilon}{8M_2}=\varepsilon.$$

由此知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)g(0)dx$$
$$= g(0).$$

31. 证明 $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

证　$x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n$.

令

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则 $f'(x) = 1 + \ln x$. 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 故 f 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上递减; 当 $\frac{1}{e} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 f 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上递增. 因此,

$$f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(1)$$

为极大值, 而 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ 为极小值, 于是,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{e}.$$

当 M 是任意实数时, $e^M = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M^n}{n!}$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 若固定 $M\left(M > \frac{1}{e}\right)$, 就存在 n_0, 使 $n > n_0$ 时便有

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{M^k}{k!} < \varepsilon.$$

若 $0 < x < 1$, 则当 $n > n_0$ 时,

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(x\ln x)^k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{e}\right)^k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}M^k < \varepsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n$ 在 $(0,1)$ 内一致收敛于 x^{-x}, 从而可以逐项积分:

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x dx.$$

而

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!},$$

故

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

32. 设 $\{f_n\}$ 在任何有界区间上一致收敛于 f, 且 f_n 在任何有界区间上可积, 又存在函数 F, 使 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ $(n=1,2,\cdots)$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$$

收敛. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

证 因 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, 且 $\{f_n(x)\}$ 在任何有界区间上一致收敛于 $f(x)$, 故

$$|f(x)| \leqslant F(x).$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ 收敛, 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛. 于是, 可取充分大的正数 A, 使

$$\left|\int_{-\infty}^{-A} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \left|\int_{A}^{+\infty} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{5},$$
$$\left|\int_{-\infty}^{-A} F(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \left|\int_{A}^{+\infty} F(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

又因 $\{f_n\}$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛于 f, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-A}^{A} f_n(x)dx = \int_{-A}^{A} f(x)dx.$$

因此, 存在 n_0, 当 $n > n_0$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_{-\infty}^{-A} f(x)dx\right| + \left|\int_{A}^{+\infty} f(x)dx\right| + \int_{-\infty}^{-A} F(x)dx + \int_{A}^{+\infty} F(x)dx \\
&\quad + \left|\int_{-A}^{A} f(x)dx - \int_{-A}^{A} f_n(x)dx\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

33. 设 f_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f. 证明 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也一致连续.

证 因 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 f, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n(\varepsilon)>0$, 当 $n\geqslant n(\varepsilon)$ 时, 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

特别有

$$|f(x)-f_{n(\varepsilon)}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, 考虑

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant{}&|f(x_1)-f_{n(\varepsilon)}(x_1)|\\&+|f_{n(\varepsilon)}(x_1)-f_{n(\varepsilon)}(x_2)|+|f_{n(\varepsilon)}(x_2)-f(x_2)|\\<{}&\frac{2\varepsilon}{3}+|f_{n(\varepsilon)}(x_1)-f_{n(\varepsilon)}(x_2)|.\end{aligned}$$

因 $f_{n(\varepsilon)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 故对上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 便有

$$|f_{n(\varepsilon)}(x_1)-f_{n(\varepsilon)}(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

34. 设 $\{x_n\}$ 是区间 $(0,1)$ 中的全体有理数. 对 $x\in(0,1)$, 定义

$$f(x)=\sum_{x_n<x}\frac{1}{2^n},$$

计算积分 $\int_0^1 f(x)dx$ ([22], 1970, p.1018).

解 令

$$g_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_n,\\ \dfrac{1}{2^n}, & x>x_n,\end{cases}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 故

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 g_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x_n)}{2^n}.$$

35. 证明: 每个幂级数必是某个函数的 Taylor 级数.

我们知道, 并非每个三角级数都是某个函数的 Fourier 级数 (参看 [9]). 于是自然会问: 是否每个幂级数必是某个函数的 Taylor 级数? 我们指出, 这个问题的答案是肯定的. 即给定实数列 $\{a_n\}$, 必存在一个函数 f, 使得它的 Taylor 级数是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 即

$$f^{(n)}(0)=a_nn!.$$

证 对 $n=0,1,2,\cdots$, 定义函数列 g_n 为:

$$g_n(x)=\begin{cases} a_n n!, & |x|\leqslant \dfrac{1}{2|a_n|n!+1}, \\ 0, & |x|\geqslant \dfrac{2}{2|a_n|n!+1}, \end{cases}$$

在其余部分, 做任何光滑连接, 使得在每个部分是单调的, 并有任意阶有限导数.

然后设 $f_0=g_0$, 当 $n\geqslant 1$ 时设

$$f_n(x)=\int_0^x\int_0^{x_{n-1}}\cdots\int_0^{x_2}\int_0^{x_1} g_n(x_0)dx_0dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

因对每一 $n\geqslant 1$, 恒有

$$|f_n^{(n-1)}(x)|=\left|\int_0^x g_n(t)dt\right|\leqslant\left|\frac{2a_n n!}{2|a_n|n!+1}\right|<1,$$

故对不等式 $-1<f_n^{(n-1)}(x)<1\ (n=1,2,\cdots)$ 积分 $n-k-1$ 次, 就得到

$$|f_n^{(k)}(x)|\leqslant |x|^{\frac{n-k-1}{(n-k-1)!}}\quad (k=0,\cdots,n-1),$$

其中规定 $f_n^{(0)}=f_n$. 由 Weierstrass 判别法, 知道级数 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(x)\ (k\geqslant 0)$ 在每个有界区间上一致收敛. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x),$$

则可逐项求导:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(x),\quad k\geqslant 1.$$

由于 $f_n^{(k)}(0)=a_n n!\delta_{nk}$, 其中当 $n=k$ 时 $\delta_{nk}=1$, 当 $n\neq k$ 时 $\delta_{nk}=0$, 因而

$$f^{(n)}(0)=a_n n!.$$

推论 因为函数

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

的 Taylor 级数恒为 0 (参看本章反例 30), 故对上述函数 f 和任意实数 λ, 函数

$$h(x)=f(x)+\lambda g(x)$$

与函数 $f(x)$ 具有相同的 Taylor 级数. 换言之, 存在无穷多个函数, 使其 Taylor 级数为任一给定的幂级数.

反　例

1. 在各个 E_k $(k=1,2,\cdots)$ 上一致收敛, 而在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 上不一致收敛的函数列.

设 $f_n(x)=x^n$ $(n=1,2,\cdots)$, 则函数列 $\{f_n\}$ 在每个区间 $E_k=[\frac{k-1}{k},\frac{k}{k+1}](k=1,2,\cdots)$ 上都一致收敛于 $f\equiv 0$. 又, $\{f_n\}$ 在 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k=[0,1)$ 上处处收敛于 $f\equiv 0$, 但它在 $[0,1)$ 上并不一致收敛.

注　容易证明, 如果函数列 $\{f_n\}$ 在各个 E_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 上一致收敛, 那么 $\{f_n\}$ 在并集 $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ 上也一致收敛. 上述反例说明了不能把这个命题推广到无穷多个集合的并集上去.

2. 一个在紧集上一致有界的连续函数列, 而不存在收敛子列.

设

$$f_n(x)=\sin nx \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi, n=1,2,\cdots).$$

假如存在某个正整数列 $\{n_k\}$, 使得 $\{\sin n_k x\}$ 对每个 $x\in[0,2\pi]$ 都收敛, 那么必然有

$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

由此得到

$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,$$

据 Lebesgue 有界收敛定理 (参看 [12]), 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2dx=0.$$

另一方面, 由简单计算可得

$$\int_0^{2\pi}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2dx=2\pi.$$

矛盾. 因此, $\{\sin nx\}$ 中不存在收敛子列.

3. 一个一致有界且处处收敛的连续函数列, 它没有一致收敛的子列.

设

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} \quad (0\leqslant x\leqslant 1, n=1,2,\cdots),$$

则对任何 $x\in[0,1]$ 及正整数 n, 恒有

$$|f_n(x)|\leqslant 1,$$

即 $\{f_n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上是一致有界的. 又, 对每一 $x\in[0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

即连续函数列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 0. 但是, 由于

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1 \quad (n=1,2,\cdots),$$

可见 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[0,1]$ 上均不可能一致收敛.

4. 一个有界函数列, 它处处收敛于一个无界函数.

各个函数

$$f_n(x)=\begin{cases}\min\left\{n,\dfrac{1}{x}\right\}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在闭区间 $[0,1]$ 上全都有界, 且在 $[0,1]$ 上处处收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

然而, 极限函数 f 在 $[0,1]$ 上无界.

注 容易证明, 一致收敛的有界函数列, 其极限函数也是有界的. 上述反例说明了在这一陈述中一致收敛的条件不能减弱为处处收敛.

5. 一个不一致有界的函数列, 它处处收敛于一个有界函数.

设

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ 或 } \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1,\\ n, & x=\dfrac{1}{2n},\end{cases}$$

而在区间 $\left[0,\frac{1}{2n}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]$ 上, 规定 f_n 是线性函数, 并且是连续的. 函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上处处收敛于零: 因为当 $x=0$ 时, 显然成立; 而当 $x>0$ 时, 只要 $n>\frac{1}{x}$, 就有 $f_n(x)=0$. 然而, 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上并不一致有界.

注 容易证明, 如果函数列 $\{f_n\}$ 在点集 E 上一致有界且处处收敛于函数 f, 那么 f 在 E 上亦必有界. 上述反例说明了也确实存在不一致有界的函数列, 它却处处收敛于一个有界函数.

6. 一个连续函数列的非一致极限, 它在一个稠密集上无处连续.

在区间 $[0,1]$ 上定义函数 f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数且 } q>0,\\ 0, & x \text{ 为 } [0,1] \text{ 中的其他点}.\end{cases}$$

对于任意正整数 n, 定义 f_n 如下: 按照各点 $(\frac{p}{q},\frac{1}{q})$, 其中 $1\leqslant q<n, 0\leqslant p\leqslant q$, 在各个形如 $(\frac{p}{q}-\frac{1}{2n^2},\frac{p}{q})$ 的区间, 定义

$$f_n(x)=\min\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{q}+2n^2\left(x-\frac{p}{q}\right)\right\};$$

在各个形如 $(\frac{p}{q},\frac{p}{q}+\frac{1}{2n^2})$ 的区间, 定义

$$f_n(x)=\max\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{q}-2n^2\left(x-\frac{p}{q}\right)\right\};$$

以及, 在 $[0,1]$ 上 $f_n(x)$ 仍未得到定义的各个点 x, 则令 $f_n(x)=\frac{1}{n}$. 在 $[0,1]$ 之外, 定义 f_n 使其成为以 1 为周期的周期函数. 于是, f_n 的图形成为一条无穷的折线弧, 它的各段或者位于水平线 $y=\frac{1}{n}$ 之上, 或者以斜率 $\pm 2n^2$ 上升到 f 的图形中的顶点. 随着 n 的递增, 这些 "钉子" 愈来愈尖, 而底线趋近 x 轴. 因此, 对各个 $x\in R^1$ 及 $n=1,2,\cdots$, 有

$$f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x),\quad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

其中 f 就是一开始定义的函数, 并且以 1 为周期把它扩张到整个实轴上. 于是, 每个函数 f_n 在 R^1 上全都处处连续, 而极限函数 f 在有理数稠密集上无处连续 (参看第二章问题 12).

7. 一个连续函数列, 它的非一致极限也是一个连续函数.

设

$$s_n(x)=\frac{n^2x}{1+n^3x^2}\quad (0\leqslant x\leqslant 1, n=1,2,\cdots),$$

则对每一 $x\in[0,1]$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=0.$$

现证 $\{s_n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于零. 为此, 只要证明对于任何正数 M, 在 $x=0$ 的附近总可以选取 x 及正整数 n, 使得 $s_n(x)>M$. 令

$$s_n'(x)=\frac{n^2(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}=0,$$

得 $x_n=n^{-\frac{3}{2}}, s_n(x_n)=\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}$, 可见当 n 充分大时, 就有 $s_n(x_n)>M$. 因此, $\{s_n\}$ 在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛于零.

这个例子是由 Osgood[60] 做出的.

注　连续函数列的一致极限也是连续函数. 上述反例说明了连续函数列的非一致极限也可能是连续函数.

8. 一个无处连续的函数列, 它却一致收敛于一个连续函数.

设

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x\text{ 为有理数},\\[2ex] 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

则对每一 n $(n=1,2,\cdots)$, 函数 f_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无处连续, 但函数列 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于连续函数 $f\equiv 0$.

9. 处处收敛而无处一致收敛的连续函数列.

在闭区间 $[0,1]$ 上定义函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p\text{ 与 }q\text{ 是互素的整数, 且 }q>0,\\[2ex] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 中的无理点}.\end{cases}$$

于是, f 在 $[0,1]$ 中的任一有理点间断, 而在任一无理点连续.

现在构造区间 $[0,1]$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 如下: 对每一正整数 n, 令 f_n 的图形为依次连接

$$(0,f(0)),\left(\frac{1}{2^{n+1}},f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right),\left(\frac{2}{2^{n+1}},f\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)\right),\cdots,\left(\frac{2^n}{2^{n+1}},f\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right)\right),(1,f(1))$$

的直线段而成的. 易见, 函数列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上连续且处处收敛于 f. 因为极限函数 f 在 $[0,1]$ 的任何子区间上不连续, 所以函数列 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 的任何子区间上都不能一致收敛于函数 f.

10. 一个处处收敛于零的连续函数列, 它却无处一致收敛.

本章反例 9 中的处处收敛而无处一致收敛的连续函数列, 其极限函数在 $[0,1]$ 的任何子区间上均不连续. 于是便产生问题, 是否存在连续函数列, 它处处收敛于某个连续函数, 但却无处一致收敛? 我们指出, 这样的连续函数列确实存在. 令

$$F_n=\left\{\frac{k}{2^m}:0<\frac{k}{2^m}\leqslant 1, m\in\{0,1,\cdots,n\}, k\text{ 为正整数}\right\},$$

并令

$$f_n(0)=0,\quad f_n\left(\frac{k}{2^m}\right)=0,\quad \frac{k}{2^m}\in F_n.$$

又当 $\frac{k}{2^m}\in F_n$ 且 k 为奇数时, 定义

$$f_n\left(\frac{k}{2^m}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^m}.$$

最后, 在 $[0,1]$ 上 f_n 尚未得到定义的各个小区间上, 令 f_n 为线性函数且连续. 于是, 对每一 n, f_n 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

易见, 对每一 $x\in[0,1], \{f_n\}$ 都收敛于零. 然而, 对任何子区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1], \{f_n\}$ 在 (α,β) 上不可能一致收敛于零. 事实上, 我们可取奇数 k_0 与非负整数 m_0, 使 $\frac{k_0}{2^{m_0}}\in(\alpha,\beta)$, 而 $\frac{1}{2^{n+1}}\to 0\ (n\to\infty)$, 所以存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时就有

$$\frac{k_0}{2^{m_0}}-\frac{1}{2^{n+1}}\in(\alpha,\beta).$$

今取正数 $\varepsilon_0(0<\varepsilon_0<\frac{1}{2^{m_0}})$, 并令 $x_n=\frac{k_0}{2^{m_0}}-\frac{1}{2^{n+1}}$, 则当 $n>n_0$ 时, 恒有

$$f_n(x_n)=\frac{1}{2^{m_0}}>\varepsilon_0.$$

这就表明 $\{f_n\}$ 在 (α,β) 上不一致收敛于零.

11. 一个各项间断的函数项级数收敛于一个连续函数, 它却无处一致收敛.

下面的例子是由 Young 做出的 (参看 [80]).

在闭区间 $[0,1]$ 上如下定义函数列:

$$u_1(x)=\begin{cases}0, & x\neq\dfrac{1}{2},\\[2mm] 1, & x=\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$u_2(x)=\begin{cases}-1, & x=\dfrac{1}{2},\\[2mm] 1, & x=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\\[2mm] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 的其他点};\end{cases}$$

$$u_3(x)=\begin{cases}-1, & x=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\\[2mm] 1, & x=\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{8},\dfrac{5}{8},\dfrac{7}{8},\cdots,\\[2mm] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 的其他点};\end{cases}$$

$$u_n(x)=\begin{cases}-1, & x=\dfrac{1}{2^{n-1}},\dfrac{3}{2^{n-1}},\cdots,\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},\\[2mm] 1, & x=\dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\\[2mm] 0, & x\text{ 为 }[0,1]\text{ 的其他点};\end{cases}$$

$\cdots\cdots$.

于是得到

$$s_1(x)=\begin{cases}0, & x\neq \dfrac{1}{2},\\ 1, & x=\dfrac{1}{2};\end{cases}\qquad s_2(x)=\begin{cases}0, & x\neq \dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\\ 1, & x=\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4};\end{cases}$$

$$\cdots, s_n(x)=\begin{cases}0, & x\neq \dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\\ 1, & x=\dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n}.\end{cases}$$

我们证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛于 $s(x)\equiv 0$.

任取 $x_0\in[0,1]$, 若 x_0 为无理数, 则 $s_n(x_0)=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=0$.

若 x_0 为有理数, $x_0=\frac{m}{k}$, 则当 n 充分大时, 有 $2^n>k$, 从而 $\frac{m}{k}$ 不等于 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$ 中的任何一个, 所以也有 $s_n(x_0)=0$, 因此 $\lim_{n\to\infty}s_n(x_0)=0$.

我们再来证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在任何区间 $(\alpha,\beta)\subset[0,1]$ 上都不可能一致收敛于 $s(x)$.

令

$$\begin{aligned}r_n(x)&=s(x)-s_n(x)\\ &=\begin{cases}-1, & x=\dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\\ 0, & x\neq \dfrac{1}{2^n},\dfrac{3}{2^n},\cdots,\dfrac{2^n-1}{2^n},\end{cases}\end{aligned}$$

于是, 对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ 而言, 不管 n 多么大, 总可以在 (α,β) 内找到形如 $\frac{m}{k}(k\geqslant n,1\leqslant m<k)$ 的点 x_0, 在这种点上, $|r_n(x_0)|=1$, 这就表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (α,β) 上不一致收敛于 $s(x)$.

12. 存在正整数列 $a_1<a_2<\cdots$ 及紧集 C, 使 $\{\sin a_nx\}$ 在 C 上收敛而非一致收敛.

取 $a_n=n!\ (n=1,2,\cdots)$, 并令

$$C=\left\{0,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\cdots\right\}.$$

因为当 $n\geqslant m$ 时, $\frac{n!}{m}$ 是整数, 所以对任何 $x\in C$, 存在正整数 N_x, 当 $n>N_x$ 时, $\sin a_nx=0$, 因而

$$\lim_{n\to\infty}\sin a_nx=0.$$

另一方面, 对任意固定的正整数 n, 存在 $x\in C$, 例如可取 $x=\frac{\pi}{2n!}$, 使 $\sin a_nx=1$. 因此, 函数列 $\{\sin a_nx\}$ 在 C 上并不一致收敛.

这个例子是由 Freimer[42] 做出的.

13. 给定 $[0,+\infty)$ 上的实值函数 f, 适合 $f(0)=0, f(1)\neq 0, \lim_{n\to\infty} f(n)=0$. 存在正整数列 $\{a_n\}$ 及紧集 C, 使 $\{f(a_n x)\}$ 在 C 上收敛而非一致收敛.

设

$$C=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\},$$

再设 $a_n=n!$. 对 C 中每一 $x\neq 0$, 当 n 充分大时, $a_n x$ 为一整数, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n x=+\infty$. 于是, 对任意 $x\in C$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n x)=0.$$

令 $0<\varepsilon<|f(1)|$, 则对每一正整数 n, 当 $x_n=\frac{1}{n!}$ 时, 就有

$$|f(a_n x_n)|=|f(1)|>\varepsilon.$$

因此, $\{f(a_n x)\}$ 在 C 上非一致收敛.

这个例子是由 Schneider[72] 做出的.

14. 一个递减的连续函数列, 它处处收敛于某个连续函数, 但并不一致收敛.

在开区间 $(0,1)$ 内如下定义函数列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx}\quad (n=1,2,\cdots).$$

则对每一 $x\in(0,1)$, 都有 $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

然而, 由于 $f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$, 可见 $\{f_n\}$ 在 $(0,1)$ 上并不一致收敛.

注 如果定义在紧集 E 上的递减的连续函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于某个连续函数 f, 那么 $\{f_n\}$ 在 E 上必定一致收敛于 f (参看本章问题 11). 上述反例说明了在这个命题中, E 为紧集的条件不可去掉.

15. 两个一致收敛的函数列, 其乘积不一致收敛.

在 R^1 上分别取

$$f_n(x)=x, g_n(x)=\frac{1}{n}\quad (n=1,2,\cdots).$$

这时 $\{f_n(x)\}$ 在 R^1 上一致收敛于 $x, \{g_n(x)\}$ 在 R^1 上一致收敛于 0. 但是, 乘积 $\{f_n(x)g_n(x)\}=\{\frac{x}{n}\}$ 在 R^1 上不一致收敛于 0.

我们还可进一步做出两个函数列, 它们在任何有界区间上都一致收敛, 但其乘积却

无处一致收敛. 例如, 设

$$f_n(x)=x\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$g_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=0 \text{ 或 } x \text{ 为无理数},\\ q+\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互素的整数, 且 } q>0.\end{cases}$$

令 $h_n(x)=f_n(x)g_n(x)$. 可以证明, $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 在任何有界区间上都一致收敛; 但 $\{h_n\}$ 在任何有界区间上都不一致收敛, 即无处一致收敛.

注 可以证明, 如果两个函数列在它们共同的定义域 D 上既有界而又一致收敛, 那么其乘积在 D 上也一致收敛. 因此, 上述反例之所以成为可能, 是由于其中至少一个函数列在所论的定义域上是无界的.

16. 一个连续函数列 $\{f_n\}$, 它在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f, 然而, f_n 的弧长的极限不等于 f 的弧长.

在闭区间 $[0,1]$ 上定义函数列 $\{f_n\}$ 如下:

当 $x=\frac{k}{n}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 时, 令 $f_n(x)=0$; 而当 $x=\frac{k}{2n}$ $(k=1,3,\cdots,2n-1)$ 时, 令 $f_n(x)=\frac{1}{n}$; 在 f_n 尚未得到定义的各个小区间上, 令 f_n 为线性函数并使 f_n 连续. 由于

$$|f_n(x)|=f_n(x)\leqslant\frac{1}{n},$$

因而 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $f\equiv 0$.

另一方面, 因为一个等边三角形的两边的长度之和是另一边长度的二倍, 所以由 f_n 的图形可知, 每个 f_n 的弧长等于 2, 从而其极限也是 2, 但 f 在 $[0,1]$ 上的弧长是 1, 因此二者并不相等.

17. 通项一致趋于零但不一致收敛的函数项级数.

容易证明, 如果一个函数项级数在集 E 上一致收敛, 那么该级数的通项在 E 上必定一致地趋于零. 应当注意, 这个命题之逆并不成立. 例如, 我们考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad 0\leqslant x<1.$$

因在区间 $[0,1)$ 上恒有 $\frac{x^n}{n}<\frac{1}{n}$, 故此级数的通项 $\frac{x^n}{n}$ 在 $[0,1)$ 上一致地趋于零. 又因

$$\frac{x^n}{n}\leqslant x^n,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $[0,1)$ 上是收敛的, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 在 $[0,1)$ 上也是收敛的. 但是, 它在 $[0,1)$ 上并不一致收敛.

18. 一个一致收敛的函数项级数, 具有不一致收敛的重排.

下面的例子是由 Bôcher[29] 做出的.

考虑级数

$$x^2-x^2+\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}-\cdots.$$

易见,

$$s_{2n}(x)=0,\quad s_{2n+1}(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

所以

$$s_{2n+1}(x)<\frac{1}{n}.$$

由此可知, 这个级数在任何区间 $(-a,b)$ 上都一致收敛于 0, 此处 $a>0,b>0$.

我们考虑重排后的级数

$$\begin{aligned}&x^2-x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^3}\\&\quad+\frac{x^2}{(1+x^2)^4}-\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-3}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-2}}-\frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}+\cdots,\end{aligned}\tag{1}$$

不难看出,

$$\begin{aligned}s_{3n-1}(x)&=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-3}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n-2}}\\&=\frac{(1+x^2)^{n-1}-1}{(1+x^2)^{2n-2}},\end{aligned}$$

而对 $x_n=\pm(2^{\frac{1}{n-1}}-1)^{\frac{1}{2}}$, 有 $s_{3n-1}(x_n)=\frac{1}{4}$, 因此, 重排后的级数 (1) 在 $(-a,b)$ 上不一致收敛.

19. 通用的连续函数列.

区间 $[0,1]$ 上的连续函数列 $\{h_n(x)\}$ 叫作**通用**的, 是指对于 $[0,1]$ 上的任一连续函数 $f(x)$, 在 $\{h_n(x)\}$ 中恒有子函数列 $\{h_{n_k}(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 则还可取 $h_{n_k}(x)$ 适合

$$m\leqslant h_{n_k}(x)\leqslant M.$$

现在, 我们着手构造一个通用的连续函数列.

设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 从而它在 $[0,1]$ 上有界, 令其上界为 M, 下界为 m. 对任给的 $\varepsilon>0$, 取充分大的正整数 k, 使当 $|x-x'|<\frac{1}{k}$ 时, 就有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

对于整数 ν $(\nu=0,1,2,\cdots,k)$, 取有理数 r_ν 使

$$0<\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)-r_\nu\right|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

做折线函数

$$h(x)=r_\nu+(r_{\nu+1}-r_\nu)(kx-\nu)\quad(\nu\leqslant kx\leqslant\nu+1,\nu=0,1,2,\cdots,k+1).$$

则在区间 $[\frac{\nu}{k},\frac{\nu+1}{k}]$ 上, 成立

$$\begin{aligned}|f(x)-h(x)|&\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|+\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)-h\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|+\left|h\left(\frac{\nu}{k}\right)-h(x)\right|\\&<\frac{\varepsilon}{5}+\left|f\left(\frac{\nu}{k}\right)-r_\nu\right|+|(r_{\nu+1}-r_\nu)(kx-\nu)|\\&<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+|r_{\nu+1}-r_\nu|.\end{aligned}$$

最后的项小于

$$\left|f\left(\frac{\nu+1}{k}\right)-f\left(\frac{\nu}{k}\right)\right|+\frac{2\varepsilon}{5}<\frac{3\varepsilon}{5}.$$

因此在 $[0,1]$ 上恒有

$$|f(x)-h(x)|<\varepsilon.$$

取 $|r_\nu|<|f(\frac{\nu}{k})|$, 则 $h(x)$ 又满足

$$m\leqslant h(x)\leqslant M.$$

此种折线函数 $h(x)$ 由其 “顶点” 之值 $r_0,r_1,\cdots,r_k$ 决定. 有理点

$$\{(r_0,r_1,\cdots,r_k)\}$$

为一可数集, 一切 $h(x)$ 也成一可数集. 给 k 以 $1,2,3,\cdots$, 又给 ε 以 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$, 得一函数列

$$h_1(x),h_2(x),h_3(x),\cdots.$$

对于 $[0,1]$ 上的任意连续函数 $f(x)$, 正数 ε 及正整数 $n_0,\{h_n(x)\}$ 中必有子列 $\{h_{n_\nu}(x)\}$ 适合

$$|h_{n_\nu}(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad\nu>n_0.$$

至此, 我们构造了一个通用的连续函数列 $\{h_n(x)\}$, 使对定义在 $[0,1]$ 上的任一连续函数 $f(x),\{h_n(x)\}$ 中有一子函数列 $\{h_{n_\nu}(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 则可使 $h_{n_\nu}(x)$ 适合

$$m\leqslant h_{n_\nu}(x)\leqslant M.$$

20. 例 19 的改进.

本章例 19 指出了存在通用的连续函数列. 这里, 我们将进一步指出, 如果 h 是 $[0,1]$ 上的严格单调的连续函数, 那么, $[0,1]$ 上的每个连续函数 f 能用 h 的多项式一致地逼近. 事实上, 因为 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调, 所以变换 $z=h(x),x=h^{-1}(z)$ 就确定了 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的点与某有界区间 $a\leqslant z\leqslant b$ 的点之间连续的一一对应, 且一个区

间的端点对应于另一区间的端点. 已知函数 $f(x)=f[h^{-1}(z)]$ 在后一区间上连续, 故由 Weierstrass 逼近定理 (参看本章问题 22), 它可以在 $a\leqslant z\leqslant b$ 上由 z 的多项式一致逼近. 若给定 $\varepsilon>0$, 则存在 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$, 使得

$$\left|f[h^{-1}(z)]-\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|<\varepsilon,\quad a\leqslant z\leqslant b,$$

这等价于

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k[h(x)]^k\right|<\varepsilon,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

这里, 我们定义 $[h(x)]^0=1$, 即使对某个 $x_0\in[0,1]$, 有 $h(x_0)=0$ 亦是如此.

注　显然, 如果用任一有界闭区间 $[\alpha,\beta]$ 来代替区间 $[0,1]$, 那么反例 20 的结论仍旧成立.

在反例 20 中, 多项式的系数均可取有理数. 因此, 由 h 的有理系数多项式所组成的连续函数列就是 $[0,1]$ 上的通用连续函数列.

$\{(\sin x)^n:n=0,1,2,\cdots\}$ 的有理系数的线性组合的全体构成了闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的通用连续函数列.

21. $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 f, 如果 f 不是多项式, 那么 f 不能用多项式一致逼近.

我们知道, 有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必可用多项式列一致逼近 (参看本章问题 22). 应当注意, 对于无界闭区间, 这一定理并不成立. 例如, 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 并且 f 不是多项式. 如果 f 能用多项式列 $\{p_n\}$ 一致逼近, 那么存在正整数 n_0, 当 $i\geqslant n_0$ 时, 对所有实数 x, 有

$$|p_i(x)-f(x)|<1.$$

于是对所有 $i\geqslant n_0$ 及所有实数 x, 有

$$|p_i(x)-p_{n_0}(x)|<2.$$

故 $p_i-p_{n_0}$ 是有界多项式, 从而是常数. 令 $i\to+\infty$ 而取极限, 得到 $f-p_{n_0}$ 是常值函数, 从而 f 是多项式, 这与假设发生矛盾.

22. 一个一致收敛的函数项级数, 它却无处绝对收敛.

令

$$a_k(x)=\frac{(-1)^{k-1}}{x^2+k},\quad -\infty<x<+\infty,\quad k=1,2,\cdots.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(x)$ 是交错级数, 而且对每一 $x\in(-\infty,+\infty)$, 都有

$$|a_k(x)|>|a_{k+1}(x)|,\quad \lim_{k\to\infty}a_k(x)=0,$$

因而该级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛, 设其和为

$$s(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+3}-\frac{1}{x^2+4}+\cdots.$$

令

$$b_n(x)=\frac{1}{x^2+(2n-1)}-\frac{1}{x^2+2n},$$

则有 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$. 由于

$$b_n(x)=\frac{1}{[x^2+(2n-1)][x^2+2n]}\leqslant\frac{1}{(2n-1)2n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$ 收敛, 因此, 根据级数一致收敛的 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

现在证明, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(x)|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无处收敛. 事实上, 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 并取正整数 $n_0\geqslant x_0^2$. 于是, 当 $k\geqslant n_0$ 时, 就有

$$\frac{1}{x_0^2+k}\geqslant\frac{1}{n_0+k}\geqslant\frac{1}{2k}.$$

因为级数 $\sum_{k\geqslant n_0}\frac{1}{2k}$ 是发散的, 所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_0^2+k}$ 也是发散的.

23. 存在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 绝对并一致收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 并不一致收敛.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

易见,

$$s_n(x)=(1-x)\sum_{k=1}^{n}(-x)^k=(1-x)\frac{-x-(-x)^n}{1+x}.$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\frac{x(x-1)}{1+x}.$$

因此

$$\left|s_n(x)-\frac{x(x-1)}{1+x}\right|=\frac{1-x}{1+x}x^n\leqslant(1-x)x^n.$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 当 $1-\varepsilon<x\leqslant 1$ 时,

$$\left|s_n(x)-\frac{x(x-1)}{1+x}\right|\leqslant(1-x)x^n\leqslant 1-x<\varepsilon.$$

而当 $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$ 时,

$$\left|s_n(x)-\frac{x(x-1)}{1+x}\right|\leqslant x^n\leqslant(1-\varepsilon)^n.$$

于是, 存在正整数 $n_0=n_0(\varepsilon)$, 当 $n>n_0$ 时可使 $(1-\varepsilon)^n<\varepsilon$. 因此, 所论级数在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $\frac{x(x-1)}{1+x}$.

现在再讨论绝对值级数的收敛性. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}x^n=s(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛于 $s(x)$. 然而, 由于和函数 $s(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 可见绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

注　容易证明, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛. 上述反例表明, 这个命题之逆并不成立.

24. 一个绝对并一致收敛的函数项级数, 它无任何正项数值优级数.

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x), 0\leqslant x\leqslant 1$, 其中

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2^{-(n+1)},\\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)}<x<2^{-n},\\ 0, & 2^{-n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

我们先来证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上绝对收敛. 由于 $u_n(x)\geqslant 0$, 故只需讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛性. 显然, 对于固定的 x, 若 $x=0$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, 则 $u_n(x)=0$ $(n=1,2,\cdots)$, 故此时级数之和为 0. 若 $0<x<\frac{1}{2}$, 则唯有满足不等式 $2^{-(n+1)}<x<2^{-n}$ 的一项 $u_n(x)=\frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x)\neq 0$, 对于其余的 $n, u_n(x)=0$. 于是所论级数是只有一项组成的, 因此它也是收敛的.

我们再来证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 为此, 令 $u_n(x)=\frac{1}{n}v_n(x)$, 其中

$$v_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 2^{-(n+1)},\\ \sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)}<x<2^{-n},\\ 0, & 2^{-n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

因为对任何 $x\in[0,1]$ 及正整数 n, 都有

$$0<\sum_{k=1}^{n}v_k(x)\leqslant 1,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 的部分和在 $[0,1]$ 上一致有界; 而数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 对每一 x 都是单调的, 且当 $n\to\infty$ 时, 对于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 x 来说, 它一致地趋于 0, 于是, 由 Dirichlet 判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}v_n(x)$$

在区间 $[0,1]$ 上一致收敛.

最后证明, 所论级数不能用收敛的正项级数作为其优级数. 事实上, 假如有优级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 存在, 那么对于区间 $[0,1]$ 中的任何 x, 都应该有

$$|u_n(x)| \leqslant c_n,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 设 n 是任意的正整数, 则恒有落在区间 $(2^{-(n+1)}, 2^{-n})$ 内的 x_n 使

$$\sin^2(2^{n+1}\pi x_n) > \frac{1}{2},$$

于是

$$u_n(x_n) = \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x_n) > \frac{1}{2n}.$$

因此, $c_n \geqslant |u_n(x)| > \frac{1}{2n}$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散, 这与所设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为收敛的优级数发生矛盾.

注 上述反例表明, 对于某些函数项级数的一致收敛性, 是不能用 Weierstrass 判别法去判定的.

25. 一个一致收敛的可微函数列, 其导函数列的极限不等于极限函数的导数.

考虑函数列

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n \quad (-\infty < x < +\infty, n = 1, 2, \cdots).$$

显然, 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{1}{n}\arctan x^n\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}.$$

因此, 当 $n > \frac{\pi}{2\varepsilon}$ 时, 就有

$$|f_n(x)| < \varepsilon.$$

由此可见, 函数列 $\{f_n\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 $f \equiv 0$.

另一方面, 我们有

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

应当注意, 如果再加上条件: 导函数列 $\{f_n'\}$ 在所论区间上一致收敛, 那么必有

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

因此, 想要这种例子得以存在, 导函数列的极限就不能是一致的.

注　我们甚至可以做出一个一致收敛的无穷可微函数列, 其极限函数无处可微. 例如, 设

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b^k\cos(a^k\pi x),$$

此处 $0<b<1, a$ 为一奇整数且 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$. 易见, 对每一 $n, s_n(x)$ 在 R^1 上无穷可微, 且 $\{s_n(x)\}$ 在 R^1 上一致收敛于某个连续函数 $s(x)$. 但是, 极限函数 $s(x)$ 在 R^1 上无处可微 (参看第三章反例 29).

26. 一个一致收敛的无穷可微函数列, 其导函数列无处收敛.

设

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\quad (n=1,2,\cdots),$$

则对每一 n, f_n 在 R^1 上无穷可微, 且 $\{f_n\}$ 在 R^1 上一致收敛于 $f\equiv 0$. 另一方面,

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx\quad (n=1,2,\cdots),$$

可见导函数列 $\{f_n'\}$ 在 R^1 上处处发散.

27. 一个非一致收敛的可微函数列, 其导函数列的极限等于极限函数的导数.

设

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k},\quad 0\leqslant x<1,$$

则

$$s_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}s_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

又

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\ln\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\left(\lim_{n\to\infty}s_n(x)\right)'=\frac{1}{1-x}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}s_n'(x)=\left(\lim_{n\to\infty}s_n(x)\right)'.$$

然而, 函数列 $\{s_n\}$ 在区间 $[0,1)$ 上并不一致收敛. 为证明这一陈述, 我们先给出一个关于判别不一致收敛的命题如下: 若对每一 n, s_n 在 $x=c$ 左连续, 但数列 $\{s_n(c)\}$ 发散, 那么对任意的 $\delta(0<\delta<c)$, 函数列 $\{s_n\}$ 在区间 $(c-\delta,c)$ 上必定不一致收敛 (参看本章问题 13). 注意到数列 $s_n(1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ (n=1,2,\cdots)$ 发散, 于是由上述命题可知, 对

任意的 $\delta(0<\delta<1)$, 函数列 $\{s_n\}$ 在 $(1-\delta,1)$ 内不一致收敛, 从而它在 $[0,1)$ 内也不一致收敛.

28. $[0,+\infty)$ 上的一个一致收敛于零的广义可积函数列 $\{f_n\}$, 而使数列 $\{\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\}$ 发散.

在 $[0,+\infty)$ 上如下定义函数列:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 0\leqslant x\leqslant n^2,\\ 0, & x>n^2,\end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛于 0, 且对每一 n, f_n 在 $[0,+\infty)$ 上都是广义可积的. 但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty} n=+\infty.$$

29. $[1,+\infty)$ 上的一个一致收敛的广义可积函数列, 其极限函数并不广义可积.

在 $[1,+\infty)$ 上定义函数 f_n 及 f 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 1\leqslant x\leqslant n,\\ \\ 0, & x>n,\end{cases}\qquad f(x)=\frac{1}{x}.$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 取正整数 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>n_0$ 时, 对一切 $x\in[1,+\infty)$ 都有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

因此, $\{f_n\}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛于 f. 又对每一 n, f_n 在 $[1,+\infty)$ 上广义可积. 但是, f 在 $[1,+\infty)$ 上并不广义可积.

注　容易证明, 对于一致收敛的可积函数列, 其极限函数也是可积的. 上述反例说明, 对于广义积分而言, 相应的命题并不成立.

30. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数处处收敛, 但仅在一点与这个函数相合.

函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是无穷可微的, 并且它的所有各阶导数在 $x=0$ 处都等于零, 所以它的 Maclaurin 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}0$$

在实轴上收敛于恒等于零的函数. 因此, 它只能在唯一的点 $x=0$ 处与 $f(x)$ 相合.

这个例子是由 Scheeffer[71] 做出的.

注　上述反例说明了从函数 f 在点 a 的各阶有限导数的存在性不能推得对任意的 $x \neq a$, 有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

正因为如此, 所以我们在研究某个函数的 Taylor 级数时, 就必须讨论这个级数的余项.

31. 一个函数, 它的 Maclaurin 级数仅在一点收敛.

函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{a^{-n}}{a^{-2n}+x^2}\quad(a>1)$$

是无穷可微的, 这是因为接连逐项微分得到的所有级数中都出现因子 $\frac{1}{n!}$, 所以这些级数全都一致收敛. 它的 Maclaurin 级数是

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{a^{2k+1}}x^{2k}.$$

显然, 对于任意的 $x \neq 0$, 此级数发散; 而在 $x=0$ 处, 它收敛于 e^a.

第七章　多 元 函 数

基本概念和主要结果

这一章考虑的是定义在 n 维欧氏空间 R^n 特别是二维欧氏空间 R^2 的子集上的函数. 基本定义和性质给出如下:

设 D 为 R^2 中的点集, $f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, (x_0,y_0) 是 D 的聚点, A 是一定数. 如果对于任给的 $\varepsilon>0$, 皆有 $\delta>0$, 使当

$$0<\|(x,y)-(x_0,y_0)\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

且 $(x,y)\in D$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

我们就说当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时, 函数 $f(x,y)$ 以 A 为**极限**, 并记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

连续函数的概念由极限概念立即可以得到, 亦即若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有定义, 又 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在且等于 $f(x_0,y_0)$, 则称 $f(x,y)$ **在点** (x_0,y_0) **连续** (对于 D 的孤立点处, 我们约定 f 在该点是连续的). 若 $f(x,y)$ 在每一点 $(x,y)\in D$ 连续, 则称 $f(x,y)$ **在** D **上连续**.

关于极限的性质和运算法则, 连续函数的运算法则以及有界闭集上连续函数的性质, 均和一元函数的情形相仿, 这里不再赘述.

前面所考虑的函数 $f(x,y)$ 的极限, 是当 x,y 同时趋于各自的极限时所得到的. 此外, 我们还要讨论 x,y 先后相继地趋于各自的极限时 $f(x,y)$ 的极限; 前者称为**二重极限**, 后者称为**累次极限**.

若对任一固定的 y, 当 $x\to a$ 时, $f(x,y)$ 的极限存在:

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y),$$

而 $\varphi(y)$ 在 $y \to b$ 时的极限也存在并等于 A, 亦即 $\lim_{y\to b}\varphi(y) = A$, 那么称 A 为 $f(x,y)$ 先对 x、后对 y 的累次极限, 记为

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A.$$

同样可定义先对 y、后对 x 的累次极限

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

对于一元函数 $y = f(x)$, 我们有所谓左极限和右极限的概念, 现在对于二元函数, 我们也来考虑函数沿着某个方向的极限. 设 $f(x,y)$ 定义在 (x_0,y_0) 的某个邻域上, 假如

$$\lim_{\rho\to 0+} f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta) = l$$

存在, 就是当动点 (x,y) 沿着由 $(\cos\alpha,\cos\beta)$ 所确定的半直线趋于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 趋于 l, 则称 l 为 $f(x,y)$ 沿着方向 $(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的**方向极限**.

对函数 $u = f(x,y)$, 如给 x 以改变量 Δx, 于是函数相应地也得一改变量

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

存在, 则此极限值就称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处**对 x 的偏导数**, 记为 $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\left(\text{或 } f'_x, \frac{\partial u}{\partial x}, u'_x\right)$. 同样地, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 就是极限值 (如果存在)

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

从定义立刻可知, 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 关于 x (或 y) 可导 (有限导数), 则 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 关于 x (或 y) 连续, 不过要注意, 此时并不能推出 $f(x,y)$ 关于两个变量是连续的.

与一元函数一样, 可类似地定义高阶偏导数. 一般地, $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 仍旧是 x,y 的函数, 如果它们对 x 或对 y 还可以求偏导数, 就称为原来函数的**二阶偏导数**, 记为

$$f''_{x^2} = \frac{\partial f'_x}{\partial x} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$f''_{y^2} = \frac{\partial f'_y}{\partial y} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial f'_x}{\partial y} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y};$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial f'_y}{\partial x} \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

一般而言, 对各个不同变量求偏导数的次序是不可交换的.

设函数 $f(x,y)$ 定义于某区域内[①], $P(x,y)$ 为这区域内任一点, l 为过 P 点的任一有向线段; 再设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这方向上另一任意点, $|PP'|$ 是 P, P' 两点间线段的长度, 令 P' 沿 l 趋向于 P, 此时, 若

$$\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|P'P|}$$

存在, 此极限就称为 $f(x,y)$ 在 P 点沿 l 的**方向导数**, 记为 $\frac{\partial f}{\partial l}$. 此时称 $f(x,y)$ 在 P 点是**弱可微**的.

若函数 $u=f(x,y)$ 的全改变量 Δu 可表示为

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),\end{aligned}$$

式中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关而仅依赖于 x, y, 则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) **可微**, 并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**, 记为 du 或 $df(x,y)$, 即

$$du = df(x,y) = A\Delta x + B\Delta y.$$

若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 则

$$\begin{aligned}f'_x(x,y) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2}\right)}{\Delta x} = A.\end{aligned}$$

完全一样地可以证明, 此时 f'_y 也存在且等于 B, 故有

$$du = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y.$$

因自变量的改变量等于自变量的微分, 故上式可写为

$$du = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

对一元函数而言, 可微与可导 (有限导数) 是同一回事; 而对多元函数来说, 偏导数存在不一定可微.

下面我们再引入二元函数的极值概念.

若函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内成立不等式

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0),$$

① 所谓平面区域 (简称区域) 可以是整个 xy 平面或者是 xy 平面上由几条曲线所围成部分.

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 取得**局部极大值** $f(x_0,y_0)$, 点 $M_0(x_0,y_0)$ 称为函数 $f(x,y)$ 的**极大点**; 类似地, 若在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内成立不等式

$$f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 取得**局部极小值** $f(x_0,y_0)$, 点 M_0 称为 $f(x,y)$ 的**极小点**.

局部极大值与极小值统称为**局部极值**; 极大点与极小点统称为**极值点**.

如果函数 $u=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在偏导数, 且在 (x_0,y_0) 处有局部极值, 则

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

如果 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数都在 (x_0,y_0) 附近连续, 并且 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$. 令

$$A=f''_{x^2}(x_0,y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,y_0), \quad C=f''_{y^2}(x_0,y_0).$$

(i) 如果 $B^2-AC<0$, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取局部极值. 当 $A<0$ (或 $C<0$) 时取局部极大值; 当 $A>0$ (或 $C>0$) 时取局部极小值.

(ii) 如果 $B^2-AC>0$, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不取局部极值.

(iii) 如果 $B^2-AC=0$, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可能取局部极值, 也可能不取局部极值.

本章的某些问题和反例还要涉及条件极值与 Lagrange 乘数法, 以及隐函数理论.

问 题

1. 求极限

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}.$$

解

$$\begin{aligned}
S_{m,n}&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}\\
&=\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x^{i+j-1}dx\\
&=\int_0^1 x\left[\sum_{i=1}^{m}(-x)^{i-1}\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(-x)^{j-1}\right]dx\\
&=\int_0^1 x\cdot\frac{1-(-x)^m}{1+x}\cdot\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\\
&=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}[x+(-1)^{m+1}x^m+(-1)^{n+1}x^n+(-1)^{m+n}x^{m+n}]dx.
\end{aligned}$$

因

$$\int_0^1 \frac{x^k}{(1+x)^2}dx < \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1},$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \frac{x^k}{(1+x)^2}dx = 0.$$

从而有

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

2. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$ 收敛, 其中 $c_n \geqslant 0$. 证明: 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$ 收敛.

证　因为 $c_n \geqslant 0$, 所以只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$ 收敛即可. 但

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2} &= c_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+n^2} < c_n\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+n^2}\\ &= \frac{c_n}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{c_n}{n}.\end{aligned}$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_n}{k^2+n^2}$ 以收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi c_n}{2n}$ 为其优级数, 故收敛.

3. 设函数 f 在圆周上有定义并且连续, 证明: 可以找到一条直径的两个端点 a 与 b, 使得 $f(a)=f(b)$.

证　设圆周上的点的位置由角 $\varphi\ (-\infty<\varphi<+\infty)$ 给定 (亦即, 每个点对应于无穷多个 φ 值), 则 f 是 φ 的函数, 并且连续, 不妨记作 $f(\varphi)$, 并令

$$g(\varphi) = f(\varphi+\pi) - f(\varphi).$$

我们有

$$\begin{aligned}g(\varphi+\pi) &= f(\varphi+2\pi) - f(\varphi+\pi)\\ &= f(\varphi) - f(\varphi+\pi) = -g(\varphi).\end{aligned}$$

因此, $g(\varphi)$ 在 $[\varphi,\varphi+\pi]$ 中某个点 φ^* 处的值为 0. 于是, $f(\varphi^*+\pi)=f(\varphi^*)$, 这就是所要证明的.

4. 设 $f(x,y)$ 满足 (i) 对固定的 $y\neq b, \lim_{x\to a} f(x,y)=\psi(y)$; (ii) 存在 $\eta>0$, 使 $f(x,y)$ 当 $y\to b$ 时关于 $x\in E=\{x: 0<x<|x-a|<\eta\}$ 存在一致极限 $\varphi(x)$. 证明:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y).$$

证　由条件 (ii), 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|y-b|<\delta$ 时,

$$|f(x,y)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\quad (x\in E).$$

于是, 当 $0<|y'-b|<\delta$ 时,

$$|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon.$$

由 (i), 令 $x\to a$ 得到

$$|\psi(y)-\psi(y')|\leqslant\varepsilon.$$

据 Cauchy 准则, 存在有限数 A 使

$$\lim_{y\to b}\psi(y)=A.$$

故存在 δ_1 $(0<\delta_1<\delta)$, 只要 $0<|y-b|<\delta_1$, 则下列不等式同时成立:

$$f(x,y)-\frac{\varepsilon}{2}<\varphi(x)<f(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}(x\in E), \tag{1}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\psi(y)<A+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

由不等式 (1), (2) 及条件 (i), 我们有

$$\begin{aligned}A-\varepsilon<\psi(y)-\frac{\varepsilon}{2}&\leqslant\varliminf_{x\to a}\varphi(x)\leqslant\varlimsup_{x\to a}\varphi(x)\\&\leqslant\psi(y)+\frac{\varepsilon}{2}<A+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 便得

$$\varliminf_{x\to a}\varphi(x)=\varlimsup_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=A.$$

即

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y).$$

5. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上有定义, 且对任意 $x_0\in[0,1], f(x,y)$ 于 $(x_0,0)$ 点连续. 证明存在 $\delta>0$, 使 $f(x,y)$ 于 $D^*=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\delta\}$ 上有界.

证法 1 (反证法) 假若不然, 则对任意 $\delta>0, f(x,y)$ 在 D^* 上无界. 于是有

$$(x_n,y_n)\in D_n=\left\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\},$$

使得

$$|f(x_n,y_n)|>n\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $\{(x_n,y_n)\}$ 有界, 故必有子列 $\{(x_{n_i},y_{n_i})\}$, 使

$$(x_{n_i},y_{n_i})\to(x_0,y_0)\quad(i\to\infty).$$

显然, $x_0\in[0,1], y_0=0$, 从而由 $f(x,y)$ 于 $(x_0,0)$ 点的连续性知

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i},y_{n_i})=f(x_0,0)$$

这与 $|f(x_{n_i},y_{n_i})|>n_i$ 矛盾.

证法 2 对任意 $x_0\in[0,1]$, 由 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 的连续性可知存在 $\delta_{x_0}>0$, 使 $f(x,y)$ 在开邻域 $U_{\delta_{x_0}}=\{(x,y):|x-x_0|<\delta_{x_0},|y|<\delta_{x_0}\}$ 上有界. 由此可得到一族开集 $\{U_{\delta_x}\}$ 覆盖了有界闭集 $I=\{(x,0):0\leqslant x\leqslant 1\}$, 从而有有限个 U_{δ_x} 便可覆盖 I. 设它们的边长是 $2\delta_{x_1},\cdots,2\delta_{x_k}$, 取 $\delta=\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant k}\{\delta_{x_i}\}$, 则 $f(x,y)$ 于 D^* 上有界.

6. 设有界点列 $z_n=(x_n,y_n)\ (n=1,2,\cdots)$ 满足

$$\varliminf_{n\to\infty}\|z_n\|=l,\quad \varlimsup_{n\to\infty}\|z_n\|=L,\quad \lim_{n\to\infty}\|z_{n+1}-z_n\|=0.$$

证明对任意 $\mu, l<\mu<L$, 圆周 $x^2+y^2=\mu^2$ 上至少有 $\{z_n\}$ 的一个聚点.

证 (反证法) 假若不然, 则存在 $\mu_0\in(l,L)$, 使得圆周 $R_{\mu_0}: x^2+y^2=\mu_0^2$ 上无 $\{z_n\}$ 的聚点, 于是, 对任意 $z\in R_{\mu_0}$, 必有 $\delta_z>0$, 使以 z 为心, 以 δ_z 为半径的开圆 U_{δ_z} 内不含异于 z 且属于 $\{z_n\}$ 的点. 显然, $\{U_{\delta_z}: z\in R_{\mu_0}\}$ 覆盖了有界闭集 R_{μ_0}, 因此, R_{μ_0} 可被有限个开圆所覆盖. 于是不难看出, 存在 $\delta>0, \mu_0-\delta>l$, 使圆环

$$R_\delta:(\mu_0-\delta)^2<x^2+y^2<\mu_0^2$$

不含 $\{z_n\}$ 中的点, 而由上、下极限的性质可知, 有正整数 n', n'', 使

$$\|z_{n'}\|<\mu_0-\delta,\quad \|z_{n''}\|>\mu_0.$$

令 $n_1=\max\{n:n'\leqslant n<n'', \|z_n\|<\mu_0-\delta\}$, 便有

$$\|z_{n_1}\|<\mu_0-\delta,\quad \|z_{n_1+1}\|>\mu_0.$$

对点列 $\{z_n\}_{n=n_1+2}^\infty$ 重复上述证明, 便有 $n_2>n_1+1$, 使

$$\|z_{n_2}\|<\mu_0-\delta,\quad \|z_{n_2+1}\|>\mu_0.$$

如此下去, 便有

$$\|z_{n_k}\|<\mu_0-\delta,\quad \|z_{n_k+1}\|>\mu_0\quad (k=1,2,\cdots).$$

从而

$$\|z_{n_k+1}-z_{n_k}\|\geqslant\|z_{n_k+1}\|-\|z_{n_k}\|>\delta>0,$$

这与 $\lim_{n\to\infty}\|z_{n+1}-z_n\|=0$ 矛盾.

7. 设 $f(x,y,z)$ 于 $a\leqslant x,y,z\leqslant b$ 上连续, 令

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\min_{a\leqslant z\leqslant b}f(x,y,z).$$

证明 $\varphi(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续.

证 设 $\psi(x,y)=\min_{a\leqslant z\leqslant b}f(x,y,z), a\leqslant x,y\leqslant b$. 因 $f(x,y,z)$ 是一致连续的, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 当 $|x-x_0|<\eta, |y-y_0|<\eta$ 时,

$$f(x_0,y_0,z)-\varepsilon<f(x,y,z)<f(x_0,y_0,z)+\varepsilon,$$

从而

$$\psi(x_0,y_0)-\varepsilon\leqslant\psi(x,y)\leqslant\psi(x_0,y_0)+\varepsilon.$$

可见 $\psi(x,y)$ 是正方形 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$ 上的连续函数, 从而 ψ 也是一致连续的. 于是存在 $\delta>0$, 当 $|x'-x''|<\delta, |y'-y''|<\delta$ 时,

$$|\psi(x',y')-\psi(x'',y'')|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

任取 $x_0\in[a,b]$, 由 (1) 式, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\psi(x_0,y)-\frac{\varepsilon}{2}<\psi(x,y)<\psi(x_0,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是有

$$\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x_0,y)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x,y)\leqslant\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x_0,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 (1) 式,

$$\psi(x_0,x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\max_{x_0-\delta\leqslant y\leqslant x}\psi(x_0,y)\leqslant\psi(x_0,x_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x_0,y)=\max\left\{\max_{a\leqslant y\leqslant x_0-\delta}\psi(x_0,y),\max_{x_0-\delta\leqslant y\leqslant x}\psi(x_0,y)\right\}\leqslant\max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x_0,y)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

类似地可得另一端不等式, 故

$$\varphi(x_0)-\varepsilon\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)+\varepsilon.$$

因此, $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

8. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B$ 上连续, 而函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛且 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明: 函数列 $\{F_n(x)\}=\{f[x,\varphi_n(x)]\}$ 也在 $[a,A]$ 上一致收敛.

证 因 $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$, 故 $F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)]$ 有意义. 由题设 $f(x,y)$ 在闭区域 $a \leqslant x \leqslant A, b \leqslant y \leqslant B$ 上连续, 故在此区域上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于此区域中的任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$, 就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

特别地, 当 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

对于上述的 $\delta > 0$, 因 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 故存在正整数 n_0, 使当 $m > n_0, n > n_0$ 时, 对于一切 $x \in [a, A]$, 均有

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \delta.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n_0, 使当 $m > n_0, n > n_0$ 时, 对于一切 $x \in [a, A]$, 均有

$$|F_n(x) - F_m(x)| < \varepsilon.$$

因此, $\{F_n(x)\}$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛.

9. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G $(a < x < A, b < y < B)$ 内连续, 函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a, A) 内连续且 $b < \varphi(x) < B$. 证明: 函数 $F(x) = f[x, \varphi(x)]$ 在区间 (a, A) 内也连续.

证 任取 $(x_0, y_0) \in G$. 由题设, 函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $(x, y) \in G$ 且 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$ 在 (a, A) 中的连续性可知, 对上述的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$ (可取 $\eta < \delta$), 使当 $x \in (a, A)$ 且 $|x - x_0| < \eta$ 时, 便有

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta.$$

于是

$$|f[x, \varphi(x)] - f[x_0, \varphi(x_0)]| < \varepsilon,$$

即

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $F(x)$ 在 (a, A) 内是连续的.

10. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内对 x 是连续的, 而关于 x 对 y 是一致连续的, 证明 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$. 由于 $f(x,y)$ 关于 x 对 y 一致连续, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, 使当 $(x,y')\in G,(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时, 就有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 是连续的, 故对上述的 ε, 存在 $\delta_2>0$, 使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时, 就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 并使点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域包含在 G 内, 则当点 (x,y) 属于点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域时, 就有

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1,$$

从而有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此, $f(x,y)$ 在 P_0 连续. 由 P_0 的任意性知函数 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的.

11. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续的偏导数 $f'_y(x_0,y_0)$, 并且 $f'_x(x,y)$ 存在. 证明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

证 记

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]\\&\quad+[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)],\end{aligned}$$

并记 $\rho=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}$. 因 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在, 故有

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)&=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x)\\&=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+o(\rho).\end{aligned}$$

又因 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 故有 $0<\theta<1$, 使得

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)&=f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y\\&=f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho).\end{aligned}$$

从而得到

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho).$$

因此, $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微.

12. 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续. 问: (i) $\varphi(x,y)$ 在什么条件下, 偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在? (ii) $\varphi(x,y)$ 在什么条件下, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微?

解 (i)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\varphi(0,0),\\
&\lim_{x\to 0-}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=-\varphi(0,0),\\
&\lim_{y\to 0+}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=\varphi(0,0),\\
&\lim_{y\to 0-}\frac{f(0,0+y)-f(0,0)}{y}=-\varphi(0,0).
\end{aligned}$$

若 $\varphi(0,0)=0$, 则偏导数 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 均存在, 且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\Delta f&=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)\\
&=|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y),
\end{aligned}$$

而

$$\frac{|\Delta x-\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant 2,$$

若 $\varphi(0,0)=0$, 则当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho\to 0$ 时, 有

$$\Delta f-\frac{[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{|\Delta x-\Delta y|\varphi(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0\quad(\rho\to 0),$$

故此时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 且 $df=0$.

13. 设函数 $f(x,y)$ 在闭单位圆 $\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上有连续的偏导数, 并且 $f(1,0)=f(0,1)$. 证明: 在单位圆上至少有两点满足方程

$$y\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=x\frac{\partial}{\partial y}f(x,y).$$

证 令 $\varphi(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$, 则 φ 是以 2π 为周期的连续函数, 且 $\varphi(0)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. 故由 Rolle 定理可知存在 $\theta_1,\theta_2\left(0<\theta_1<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<\theta_2<2\pi\right)$, 使得

$$\varphi'(\theta_1)=\varphi'(\theta_2)=0.$$

由 $\varphi'=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}$ 代入 $\theta_i\ (i=1,2)$ 即得所证.

14. 设两个正数 x 与 y 之和为定值, 求函数 $f(x,y)=\frac{x^n+y^n}{2}$ 的极值, 并证明

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,\ n\text{ 为正整数}.$$

解 设 $x+y=a$ $(x>0, y>0, a$ 为常数$)$. 令

$$F(x,y)=\frac{x^n+y^n}{2}+\lambda(x+y-a),$$

并解方程组

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{nx^{n-1}}{2}+\lambda=0, \\ F'_y=\dfrac{ny^{n-1}}{2}+\lambda=0, \\ x+y=a. \end{cases}$$

得唯一驻点 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$. 不难验证, $f(x,y)=\frac{x^n+y^n}{2}$ 在 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ 达到最小值, 从而

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^n+\left(\dfrac{a}{2}\right)^n}{2}=\left(\frac{a}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

15. 证明: 在 n 个正数的和为定值的条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a$$

下, 这 n 个正数的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 的最大值为 $\frac{a^n}{n^n}$, 并由此结果推出 n 个正数的几何平均值不大于算术平均值:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证 设 $L=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)$, 并依次对 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda$ 求偏导数且令其为 0, 得

$$x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0, \tag{1}$$
$$x_1x_3\cdots x_n+\lambda=0, \tag{2}$$
$$\cdots\cdots,$$
$$x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0, \tag{n}$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0. \tag{n+1}$$

$(1)\times x_1+(2)\times x_2+\cdots+(n)\times x_n$, 得

$$n(x_1x_2\cdots x_n)+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0.$$

由 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ 得

$$\lambda=-nx_1x_2\cdots\frac{x_n}{a}.$$

将 λ 分别代入 $(1),(2),\cdots,(n)$, 得

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n}.$$

求得唯一的驻点 $\left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \cdots, \frac{a}{n}\right)$. 依题意, 该点即为 $x_1x_2\cdots x_n$ 的极大值点, 且就是最大值点. 因此, 最大值为

$$x_1x_2\cdots x_n = \frac{a^n}{n^n},$$

从而 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 的最大值为 $\frac{a}{n}$. 又, 算术平均值为 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{a}{n}$, 故

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

16. 求函数 $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$ $(x>0, y>0, z>0)$ 在球面

$$x^2+y^2+z^2 = 5r^2$$

上的最大值, 并证明对任何正数 a, b, c, 有

$$abc^3 \leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

解　设

$$F(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z + \lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2).$$

求得

$$F'_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x, \quad F'_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y, \quad F'_z = \frac{3}{z} + 2\lambda z.$$

令 $F'_x = F'_y = F'_z = 0$, 得

$$2\lambda x^2 + 1 = 0, \quad 2\lambda y^2 + 1 = 0, \quad 2\lambda z^2 + 3 = 0.$$

相加得

$$2\lambda(x^2+y^2+z^2) + 5 = 0,$$

故 $\lambda = -\frac{1}{2r^2}$. 于是, 函数 $f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+y^2+z^2 = 5r^2$ 下可能极值点是 $(r, r, \sqrt{3}r)$. 因为在第一象限内球面的三条边界线上函数 $f(x,y,z)$ 均趋于 $-\infty$, 故最大值必在曲面内部取得. 现驻点是唯一的, 因而 $f(x,y,z)$ 在点 $(r,r,\sqrt{3}r)$ 处取得最大值

$$f(r,r,\sqrt{3}r) = \ln(3\sqrt{3}r^5).$$

由此可知, 对任意正数 a, b, c, 有

$$\begin{aligned} f(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}) &= \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{b} + 3\ln\sqrt{c} \\ &\leqslant \ln(3\sqrt{3}r^5), \end{aligned}$$

其中 $r = \sqrt{\frac{a+b+c}{5}}$. 从而有

$$\frac{1}{2}\ln abc^3 \leqslant \frac{1}{2}\ln(3\sqrt{3}r^5)^2 = \frac{1}{2}\ln 27r^{10},$$

即

$$abc^3 \leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

17. 已知 x, y, z 为实数, 且 $e^x + y^2 + |z| = 3$. 证明 $e^x y^2 |z| \leqslant 1$.

证 设 $f(x,y) = e^x y^2 (3 - e^x - y^2)$. 由题设 $e^x + y^2 + |z| = 3$, 而 $|z| \geqslant 0$, 故 x, y 应满足 $e^x + y^2 \leqslant 3$. 又,

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^x y^2 (3 - 2e^x - y^2), \\ f'_y(x,y) &= 2e^x y (3 - e^x - 2y^2). \end{aligned}$$

令 $f'_x = 0, f'_y = 0$, 得驻点 $(0,1)$ 及 $(0,-1)$. 当 $y = 0$ 时也有 $f'_x = 0, f'_y = 0$, 但 $y = 0$ 时所证不等式显然成立, 故只对驻点 $(0,1)$ 及 $(0,-1)$ 进行判定.

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= e^x y^2 (3 - 4e^x - y^2), \\ f''_{xy} &= 2e^x y (3 - 2e^x - 2y^2), \\ f''_{yy} &= 2e^x (3 - e^x - 6y^2). \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & f''_{xx}(0,1) = f''_{xx}(0,-1) = -2, \\ & f''_{xy}(0,1) = -2, \quad f''_{xy}(0,-1) = 2, \\ & f''_{yy}(0,1) = f''_{yy}(0,-1) = -8, \end{aligned}$$

故 $B^2 - AC < 0$, 又 $A < 0$, 故 $(0,1)$ 及 $(0,-1)$ 均为极大点, 且 $f(0, \pm 1) = 1$. 又因为在边界 $e^x + y^2 = 3$ 上有 $f(x,y) = 0$, 故 $f(0, \pm 1) = 1$ 为最大值. 由此可得

$$f(x,y) \leqslant 1,$$

即

$$e^x y^2 |z| \leqslant 1.$$

18. 求原点到曲面 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 上的点的最短距离.

解 设 $P(x,y,z)$ 为曲面上任意一点, 它到原点的距离是

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

由于 d 与 d^2 同时取得最小值, 因而可取

$$f(x,y,z) = d^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

因动点 $P(x,y,z)$ 在曲面上, 故有条件

$$(x-y)^2-z^2-1=0.$$

于是化为求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的最小值. 设

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1],$$

解方程组

$$F'_x=2x+2\lambda(x-y)=0, \tag{1}$$
$$F'_y=2y-2\lambda(x-y)=0, \tag{2}$$
$$F'_z=2z-2\lambda z=0, \tag{3}$$
$$(x-y)^2-z^2-1=0. \tag{4}$$

由 (3) 式, $z(\lambda-1)=0$, 可得 $\lambda=1$ 或 $z=0$. 将 $\lambda=1$ 代入 (1), (2) 得

$$2x-y=0,\quad -x+2y=0.$$

解得 $x=y=0$. 代入 (4), 得 $z^2=-1$, 矛盾. 因此, $\lambda=1$ 不合理. 将 $z=0$ 代入上述方程组, 解得

$x_1=\frac{1}{2},y_1=-\frac{1}{2},z_1=0$ 或 $x_2=-\frac{1}{2},y_2=\frac{1}{2},z_2=0$. 这两点到原点的距离都是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由题意, 最短距离是存在的, 因此, 原点到曲面 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最短距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

反　例

1. 两个累次极限存在而不相等的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+y^2-y}{x+y}, & x\neq 0, y\neq 0 \text{ 且 } x+y\neq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因 $y\neq 0$ 时恒有

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=y-1,$$

故

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1.$$

同理

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1.$$

2. 两个累次极限存在且相等与二重极限存在互不蕴涵.

第一例 两个累次极限存在且相等, 但二重极限不存在的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

易见,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.$$

因此, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个累次极限都存在且相等. 然而, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的二重极限并不存在, 因为当 (x,y) 沿着直线 $y=mx(m\neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}\neq 0.$$

注 我们还可进一步做出这样的函数 $f(x,y)$, 使得 $\lim_{y\to 0} f(x,y)=g(x)$ 存在且关于 x 一致, $\lim_{x\to 0} f(x,y)=h(y)$ 存在且关于 y 一致, 又有

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{y\to 0} h(y),$$

但是 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 仍不存在. 例如, 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

于是,

$$g(x)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$h(y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)=\begin{cases}1, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

这两个极限在整个实数轴上都是一致收敛的, 且有

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{y\to 0} h(y).$$

然而, 由于那些任意接近 $(0,0)$ 的点当中, 既有 f 等于 0 的点, 也有 f 等于 1 的点, 所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 的极限不能存在.

第二例 二重极限存在而两个累次极限都不存在的函数.

设

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

则

$$\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{x}y\sin\frac{1}{y}=0.$$

因为当 $x\neq 0$ 及 $x\neq\pm\frac{1}{n\pi}$ 时, $\lim_{y\to 0}x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 不存在, 所以 $\lim_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在, 从而 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在. 由对称性可知, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)$ 也不存在.

另一方面, 由不等式

$$\begin{aligned}|f(x,y)|&=|x+y|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right|\\&\leqslant|x|+|y|\end{aligned}$$

可知,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

注　上述反例说明了累次极限存在与否和二重极限存在与否, 二者之间没有什么关系, 但可证明, 若某个累次极限和二重极限都存在, 则二者一定相等. 因此, 若两个累次极限存在而不相等, 则二重极限一定不存在.

3. 二重极限和一个累次极限存在, 而另一个累次极限不存在的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|,$$

因而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

又易见

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=0.$$

但是, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)$ 并不存在.

注　可以证明, 如果极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ 都存在, 那么它们必定相等; 同理, 如果极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 与 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ 都存在, 那么它们也必定相等.

4. 仅有一个累次极限存在的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=0.$$

但是, $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)$ 和 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 均不存在.

5. 各方向极限存在且相等而二重极限不存在的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

对任意 $\alpha, f(x,y)$ 沿着方向 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的极限

$$\lim_{\rho\to 0+}f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)=\lim_{\rho\to 0+}\frac{\rho^4\cos\alpha\sin^3\alpha}{\rho^2\cos^2\alpha+\rho^6\sin^6\alpha}=0.$$

但是, 二重极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 并不存在. 事实上, 如果 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 存在, 那么必有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

因此, 对于过 $(0,0)$ 的曲线 $y=\sqrt[3]{x}$, 应该有

$$\lim_{x\to 0}f(x,\sqrt[3]{x})=0.$$

然而

$$\lim_{x\to 0}f(x,\sqrt[3]{x})=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

此为矛盾. 足见 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 并不存在.

注 对于一元函数 $y=f(x)$, 极限 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的左右极限皆存在且相等. 对于二元函数 $u=f(x,y)$, 若极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在, 则 $f(x,y)$ 沿着任何方向 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的极限皆存在且等于 A. 上述反例说明和一元函数不一样, 这个陈述之逆是不成立的.

其实, 我们还可进一步构造一个在原点没有二重极限, 但沿着任一形如 $y=cx^{\frac{m}{n}}$ 的曲线逼近原点时极限值都为零的函数, 其中 c 是非零常数, n 和 m 是互素的正整数, 当 n 为偶数时 $x\geqslant 0$. 例如, 在 $R^1\times R^1$ 上定义函数 $f(x,y)$ 为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}y}{e^{-\frac{2}{x^2}}+y^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则当 (x,y) 沿着任意曲线 $y=cx^{\frac{m}{n}}$ 逼近 $(0,0)$ 时, 就有

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, cx^{\frac{m}{n}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{ce^{-\frac{1}{x^2}}x^{-\frac{m}{n}}}{e^{-\frac{2}{x^2}}x^{-\frac{2m}{n}}+c^2}=0.$$

也就是说, (x,y) 沿着任一形如 $y=cx^{\frac{m}{n}}$ 的曲线逼近原点时, $f(x,y)$ 的极限值都为零. 然而, 当 (x,y) 沿着 $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ 的曲线逼近原点时, $f(x,y)$ 的极限为 $\frac{1}{2}$. 由此可知, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在.

6. 各方向极限存在且相等与两个累次极限存在且相等, 二者互不蕴涵.

第一例　各方向极限存在且相等而两个累次极限都不存在的函数.

本章反例 2 (第二例) 中的函数具有所需的性质.

第二例　两个累次极限都存在且相等而各方向极限并不都存在的函数.

考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

显然,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

另一方面, 因为

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4),\quad \frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}\to 1\quad (x\to 0),$$

所以 $f(x,y)$ 沿 $y=-x$ 的方向极限是无穷大.

7. 存在函数 $f(x,y)$, 它在 (x_0,y_0) 附近有定义, 且对任何满足 $\lim_{x\to x_0}\varphi(y)=y_0$ 的形如 $y=\varphi(x)$ 的连续曲线, 均有 $\lim_{x\to x_0} f[x,\varphi(x)]=A$, 但 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

则对任何连续函数 $y=\varphi(x)$, 若 $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则有

$$\lim_{x\to 0} f[x,\varphi(x)]=0.$$

然而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 并不存在.

8. 分别对各个变量连续的间断函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

则对任意固定的 $y, f(x,y)$ 是 x 的连续函数; 而对任意固定的 $x, f(x,y)$ 是 y 的连续函数. 但是, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处并不连续, 因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 且 $x=y$ 时, $f(x,y)$ 并不趋于 $f(0,0)=0$.

9. 存在函数 $f(x,y)$, 它沿着从点 (x_0,y_0) 引出的任何直线在 (x_0,y_0) 都是连续的, 但 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 并不连续.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}, & y>0 \text{ 且 } \dfrac{x^2}{y}\leqslant 1,\\ \dfrac{y}{x^2}, & y>0 \text{ 且 } \dfrac{x^2}{y}\geqslant 1,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

又设 $f(x,-y)=f(x,y)$. 因为任意接近 $(0,0)$ 的地方总会有形如 (a,a^2) 的点, 相应的 $f(x,y)$ 的值为 1, 所以 $f(x,y)$ 在原点间断.

现在证明, $f(x,y)$ 沿着任一通过原点的直线在原点都是连续的.

事实上, 在 x 轴上 $f(x,y)\equiv 0$, 所以它沿 x 轴在原点是连续的. 现在考虑过原点的直线 $y=mx(m\neq 0)$, 当 $|x|$ 充分小时, $\frac{x^2}{y}\leqslant 1$, 所以

$$|f(x,y)|=\left|\frac{x^2}{y}\right|=\left|\frac{x}{m}\right|.$$

由此可见, $f(x,y)$ 沿着直线 $y=mx$ 在原点是连续的.

10. 任给平面可数点集 $\{(a_n,b_n)\}$, 可以构造函数 $g(x,y)$, 使 $g(x,y)$ 在 $(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$ 间断, 而在其他的点上都连续. 又, $g(x,y)$ 沿任一过 (a_n,b_n) 的直线在 (a_n,b_n) 也是连续的.

设 $\{(a_n,b_n)\}$ 是平面上的任意可数集, 令

$$\begin{aligned}g(x,y)=&\frac{1}{2}f(x-a_1,y-b_1)+\frac{1}{2^2}f(x-a_2,y-b_2)\\&+\cdots+\frac{1}{2^n}f(x-a_n,y-b_n)+\cdots,\end{aligned}$$

其中 $f(x,y)$ 是本章反例 9 中的函数. 于是, $g(x,y)$ 除了点 $(a_n,b_n)(n=1,2,\cdots)$ 而外, 它在其余的点上都是连续的. 又, $g(x,y)$ 沿任一过 (a_n,b_n) 的直线在 (a_n,b_n) 也是连续的.

本章反例 9 和反例 10 是由 W. H. Young 和 G. C. Young[81] 做出的.

11. $[0,1]\times[0,1]$ 上的一个无处连续函数 $f(x,y)$, 使对每一 $y\in[0,1], f(x,y)$ 是 x 的连续函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & y\text{ 是无理数, } x\text{ 任意,}\\ 1, & y\text{ 是有理数, } x\text{ 任意,}\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上无处连续, 因对任意固定的 $y, f(x,y)$ 作为 x 的函数为一常值函数, 故它是 x 的连续函数.

12. 函数的连续性与偏导数存在性, 二者之间互不蕴涵.

第一例　具有各阶偏导数的不连续函数

设

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

容易证明, f 具有各阶偏导数 $\frac{\partial^{m+n}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}$. 因为当 $t\neq 0$ 时, $f(t,t)=e^{-2}$, 而 $f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

这个例子是由 Burr[31] 做出的.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^{-2}y^{-2}}}{e^{x^{-4}}+e^{y^{-4}}}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$$

则 f 具有各阶偏导数. 因为

$$\lim_{\substack{x=y\\ x\to 0}} f(x,y)=\frac{1}{2},$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处间断.

这个例子是由 Snow[77] 做出的.

第二例　不存在偏导数的连续函数.

考察函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

这个函数在全平面上处处连续, 但它在原点的两个偏导数都不存在.

13. 函数的连续性与弱可微性, 二者互不蕴涵.

第一例　在某点弱可微, 而在该点并不连续的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

兹证函数 f 在 $(0,0)$ 处沿任何方向都是可微的.

事实上, 令 $\rho=(\cos\theta,\sin\theta)$, 因为

$$\begin{aligned}F(t)&=f(t\cos\theta,t\sin\theta)\\&=\begin{cases}\dfrac{t^5\cos^5\theta}{(t\sin\theta-t^2\cos^2\theta)^2+t^6\cos^6\theta}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{t^3\cos^5\theta}{(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以当 $\sin\theta\neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cos^5\theta}{(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta}=0;\end{aligned}$$

而当 $\sin\theta=0$ 时,

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^5\theta}{\cos^4\theta+t^2\cos^6\theta}=\cos\theta.\end{aligned}$$

因此, 函数 f 在 $(0,0)$ 处沿任何方向都是可微的, 即 f 在 $(0,0)$ 处是弱可微的.

另一方面, 当点 (x,y) 沿着曲线 $y=x^2$ 趋近于 $(0,0)$ 时, 极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

不存在, 从而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在, 因此, f 在 $(0,0)$ 处不连续.

第二例 连续而不弱可微的函数.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然, 函数 f 在全平面上处处连续. 但是, 它在点 $(0,0)$ 处并不弱可微.

14. 函数的弱可微与偏导数存在, 二者互不蕴涵.

第一例 在某点偏导数存在, 但在该点并不弱可微的函数.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x, & y=0,\\ y, & x=0,\\ 1, & \sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{n}\ 且\ x\neq 0, y\neq 0, n=1,2,\cdots,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由于 $f(x,0)=x$, 因而 $f'_x(0,0)=1$. 同样, $f'_y(0,0)=1$. 但是, 对于任何 $\alpha\neq 0$, 在直线 $y=\alpha x$ 上,

$$f(x,\alpha x)=\begin{cases}1, & \sqrt{x^2+\alpha^2x^2}=\dfrac{1}{n},\ 即\ |x|=\dfrac{1}{n\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad n=1,2,\cdots,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

这个函数在 $x=0$ 处是不连续的, 当然不可能有有限的导数. 这说明了虽然 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 都存在, 但 f 在原点处并不弱可微.

第二例　在某点弱可微而偏导数不存在的函数.

考察函数

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然, f 在 $(0,0)$ 处是弱可微的, 但它在该点的偏导数并不存在.

15. 偏导数均不连续的可微函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

它的偏导数是

$$f'_x(x,y)=\frac{-x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$f'_y(x,y)=\frac{-y\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.$$

易见, $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处都是不连续的. 另一方面, 因为

$$f(x,y)-f(0,0)=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处是可微的.

注 可以证明, 若 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 及其某一邻域内存在, 且在这一点它们都连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处必可微; 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处必定连续、弱可微且偏导数存在. 因此, 可得蕴涵关系如下:

$$\text{偏导数连续} \ \Rightarrow\ \text{可微}\ \Rightarrow \begin{cases}\text{连续}\\ \text{偏导数存在}\\ \text{弱可微.}\end{cases}$$

本章反例 12 至反例 15 说明了反方向的结论均不成立, 而平行的三者两两互不蕴涵.

16. 存在函数, 它的偏导数在某点不连续且在该点的任何邻域内都无界, 但此函数在该点仍然可微.

我们知道, 偏导数 f'_x 与 f'_y 连续蕴涵函数 f 可微, 本章反例 15 表明, f'_x 与 f'_y 的连续性只是 f 可微的充分条件, 而不是必要条件. 其实, 我们还可做出一个函数, 它的偏导数在某点不连续且在该点的任何邻域内都无界, 但此函数在该点仍然可微. 例如, 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

则 f 的偏导数是

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

易见, f'_x 和 f'_y 在 $(0,0)$ 处都是间断的. 又, 对于任给的正数 M, 存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时,

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}},0\right)=-2\sqrt{2n\pi}<-M.$$

因此, f'_x 在 $(0,0)$ 的任何邻域内都是无界的.

同理可证, f'_y 在 $(0,0)$ 的任何邻域内也是无界的.

下面再讨论 f 于点 $(0,0)$ 的可微性. 因为

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y|&=|f(x,y)|=(x^2+y^2)\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\\ &\leqslant x^2+y^2=o(\sqrt{x^2+y^2}),\end{aligned}$$

所以 f 于点 $(0,0)$ 是可微的.

17. 函数 f, 它在某点的邻域内连续且有有界的偏导数, 但 f 在该点仍不能微分.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

则 f 在 $x^2+y^2>0$ 的点 (x,y) 显然是连续的. 因为

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}}=\frac{\sqrt{|xy|}}{2},$$

所以 f 在点 $(0,0)$ 也是连续的.

又当 $x^2+y^2>0$ 时, $f'_x(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, f'_y(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 而在点 $(0,0)$ 处, $f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$, 所以

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{|y^3|}{|y^3|}=1,\quad |f'_y(x,y)|\leqslant 1,$$

即 f 的两个偏导数都是有界的.

现证 f 在点 $(0,0)$ 处不可微, 事实上, 假若不然, 那么就应该有

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\varepsilon\sqrt{x^2+y^2},$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 式中的 ε 应趋于 0, 今特别于上式中取 $x=y>0$, 则得

$$\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\varepsilon x.$$

由此有 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 而当 $x\to 0$ 时 ε 却并不趋向于 0, 这就违反了函数 f 在 $(0,0)$ 处可微性的假设.

18. 存在函数, 其二阶混合偏导数相等而不连续.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f'_x(x,y)=4x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-x\sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$f'_y(x,y)=4y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-y\sqrt{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\begin{aligned}f''_{xy}(x,y)=&\,8xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{4xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&-\frac{xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

又按偏导数的定义, 可得

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0,$$
$$f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)=0.$$

另一方面, 因为当 $m>0$ 时,

$$\varlimsup_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f''_{xy}(x,y)=\frac{m}{1+m^2},\qquad \varliminf_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f''_{xy}(x,y)=\frac{-m}{1+m^2},$$

所以 f''_{xy} 在点 $(0,0)$ 不连续.

同理可证, f''_{yx} 在点 $(0,0)$ 也不连续.

注 可以证明, 如果 f'_x, f'_y, f''_{xy} 在定义域上都存在, 且 f''_{xy} 连续, 那么 f''_{yx} 也存在, 而且 $f''_{xy}=f''_{yx}$. 上述反例说明了当这个命题的条件不成立时, 二阶混合偏导数仍有相等的可能性.

19. 两个偏导数在某点连续, 而本身在该点的任何邻域内不连续的函数.

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(y-\frac{1}{n}\right)}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2}, & (x,y)\neq\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\quad (m=1,2,\cdots),\\[2ex] \displaystyle\sum_{n\neq m}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(y-\frac{1}{n}\right)}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2}, & (x,y)=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

当 $(x,y)\neq(\frac{1}{m},\frac{1}{m})(m=1,2,\cdots)$ 时, 按照函数项级数逐项求导数的法则, 得到

$$f'_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left(y-\frac{1}{n}\right)\left[\left(y-\frac{1}{n}\right)^2-\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\right]}{\left[\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2\right]^2},\tag{1}$$

$$f'_y(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)\left[\left(x-\frac{1}{n}\right)^2-\left(y-\frac{1}{n}\right)^2\right]}{\left[\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2\right]^2}.\tag{2}$$

当 $(x,y)=(\frac{1}{m},\frac{1}{m})$ 时, $f'_x(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 分别等于 (1) 与 (2) 中缺 $n=m$ 项的级数.

在原点, 按偏导数的定义, 有

$$\begin{aligned}f'_x(0,0)&=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{2}}{x}\\&=\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{-\frac{1}{2}x}{\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}\right]=0.\end{aligned}$$

同理, $f'_y(0,0)=0$.

以上结果说明了函数 f 在原点是连续的, 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上有无穷多个不连续点 $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)(m=1,2,\cdots)$; 而 f'_x 和 f'_y 在原点都是连续的.

注　容易证明, 如果一元函数 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 那么 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内必定连续. 上述例子说明了对于多元函数而言, 则不尽相同.

20. 二阶混合偏导数不相等的可微函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\[2mm] 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^4+4x^2y^2-y^4)y}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^4-4x^2y^2-y^4)x}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

$$f'_x(0,y)=\begin{cases}-y, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

$$f'_y(x,0)=\begin{cases}x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

因此,

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

所以 $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$. 然而, 函数 f 是连续而且可微的, 因为 f'_x 和 f'_y 都是连续的.

21. 存在函数 f, 使 $f'_x(0,y)$ 是 y 的连续函数, 而 $f'_y(x,0)$ 不是 x 的连续函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\left(4\arctan\dfrac{y}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}f'_x(0,0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,\\ f'_x(0,y)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\sin\left(4\arctan\frac{y}{x}\right)=0,\end{aligned}$$

所以 $f'_x(0,y)$ 是 y 的连续函数. 然而,

$$\begin{aligned}f'_y(0,0)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,\\ f'_y(x,0)&=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)}{y}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{x\sin\left(4\arctan\dfrac{y}{x}\right)}{y}=4,\end{aligned}$$

因此, $f'_y(x,0)$ 在 $x=0$ 处不连续.

22. 函数 f, 使 $f''_{yx}(x,y)$ 存在而 $f'_x(x,y)$ 不存在.

设 $g(x)$ 是无处可微的连续函数 (参看第三章反例 29), 令

$$f(x,y)=g(x),$$

则 $f''_{yx}(x,y)=0$ 而 $f'_x(x,y)$ 不存在.

23. 仅在一点连续并可微的函数.

设 $\alpha>0$, 令

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}, & x,y \text{ 均为有理数},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然, f 在 $(0,0)$ 处连续, 而在其他点处均间断. 又, 它在 $(0,0)$ 处还可微:

$$f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=0\cdot x+0\cdot y+\rho^{1+\alpha},$$

这里 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \rho^{1+\alpha}=o(\rho)(\rho\to 0)$.

24. 有关的一切偏导数都存在, 但复合函数求导公式不成立的函数.

设

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}.$$

不难验证, $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 均存在且等于 0, 但 f 在点 $(0,0)$ 不可微. 此时, 若令 $x=t, y=t$, 代入得 $f(t,t)=|t|$, 它在 $t=0$ 处没有有限导数. 但

$$f'_x(0,0)\frac{dx}{dt}+f'_y(0,0)\frac{dy}{dt}=0.$$

这就说明, 复合函数求导公式

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}=f'_x(0,0)\frac{dx}{dt}+f'_y(0,0)\frac{dy}{dt}$$

不能成立.

注　如果 $f(x,y)$ 在定义域 G 内可微, $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 对于 t 可微, $(\varphi(t),\psi(t))\in G$, 则 $f[\varphi(t),\psi(t)]$ 对于 t 可微, 且有

$$\frac{df}{dt}=f'_x(x,y)\frac{dx}{dt}+f'_y(x,y)\frac{dy}{dt}.$$

上述反例表明, 有别于一元函数的情形, 对于多元函数而言, 如果仅是导数存在, 上述复合函数求导公式还不一定成立.

25. 在平面区域 D 内 $f'_y(x,y)\equiv 0$, 但是, f 在 D 内并非与 y 无关的连续可微函数.

设 $L=\{(x,y):x\geqslant 0, y=0\}$, 再设

$$D=R^1\times R^1\backslash L.$$

在 D 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3, & x>0 \text{ 且 } y>0,\\ 0, & \text{其他的 } (x,y)\in D.\end{cases}$$

显然, f 在 D 内连续可微, 并且确有连续的二阶偏导数. 虽然 f 关于 y 的一阶偏导数 $f'_y(x,y)$ 在 D 内恒等于零, 但是 f 并非与 y 无关. 例如, $f(1,1)=1$ 而 $f(1,-1)=0$.

注 这个例子表明, 为了证实在整个区域 D 内一阶偏导数恒等于零的函数是常值函数, 下面的证法无效: "既然 $f'_x(x,y)\equiv 0$, 那么 f 不依赖于 x; 既然 $f'_y(x,y)\equiv 0$, 那么 f 不依赖于 y; f 既不依赖 x 也不依赖 y, 所以 f 一定是个常数".

26. 存在函数 $F(x,y)$, 尽管 $F'_y(x_0,y_0)=0$, 但在 (x_0,y_0) 的某个邻域内, 由方程 $F(x,y)=0$ 能唯一确定 y 为 x 的函数 $y=f(x)$, 并且 $y_0=f(x_0)$.

令 $F(x,y)=(y-x)^2$, 则 $F'_y(x,y)=2(y-x)$, 故在 $x=y=0$ 处 $F'_y=0$. 但这并不妨碍所给方程 $F(x,y)=0$ 有唯一解 $y=x$, 且当 $x=0$ 时这个解等于零.

注 上述反例说明, 隐函数存在定理仅仅给出其图像通过已知点 (x_0,y_0) 的隐函数唯一存在的充分而不是必要条件.

27. 存在函数 f, 使 $\max_y\min_x f(x,y)<\min_x\max_y f(x,y)$.

在 $[0,2]\times[0,4]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=1-(x-y+1)^2,$$

则

$$\begin{aligned}&\max_y f(x,y)=1, \min_x\max_y f(x,y)=1;\\ &\min_x f(x,y)=\begin{cases}1-(y-1)^2, & y\geqslant 2,\\ 1-(3-y)^2, & y\leqslant 2,\end{cases}\\ &\max_y\min_x f(x,y)=0.\end{aligned}$$

因而

$$\max_y\min_x f(x,y)<\min_x\max_y f(x,y).$$

注 可以证明, 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\max_y\min_x f(x,y)\leqslant\min_x\max_y f(x,y).$$

上述反例说明了这个不等式中的等号未必成立.

28. 存在函数 f, 使 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$, 但 (x_0,y_0) 并非 $f(x,y)$ 的极值点.

函数 $z=f(x,y)=y^2-x^2$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=-2x, \frac{\partial z}{\partial y}=2y$, 所以

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0.$$

当 $y=0$ 时, $z=-x^2$, 所以原点恰是这条抛物线的极大点; 而当 $x=0$ 时, $z=y^2$, 原点又是这条曲线的极小点. 由此可知, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处无极值.

注　对偏导数存在的函数 $f(x,y)$, 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 有极值的必要条件是

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0.$$

上述反例说明了这个条件并不充分.

29. 存在可微函数, 它在定义域内只有一个驻点, 而且这驻点是极大 (小) 点, 但它不是最大 (小) 点.

我们知道, 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) (有限或无限, 开或闭) 上可微, 又在 (a,b) 内有唯一的驻点 x_0; 如果 x_0 是极大 (小) 点, 那么 x_0 就是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最大 (小) 点.

于是, 我们可能会猜测: 如果函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 上可微, 又在 D 内只有一个驻点 (x_0,y_0), 而且这驻点是极大 (小) 点, 那么 (x_0,y_0) 也一定就是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大 (小) 点.

这猜想是错的. 例如, 令

$$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2.$$

我们在矩形 $D:-1\leqslant x\leqslant 4, -1\leqslant y\leqslant 1$ 上来研究它的最大值. 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2-8x+2y=0, \\ f'_y(x,y)=2x-2y=0. \end{cases}$$

得两组根 $(0,0),(2,2)$. 但 $(2,2)$ 并不在 D 内, 所以 D 内只有一个驻点 $(0,0)$.

其次, 求二阶偏导数, $f''_{xx}(x,y)=6x-8, f''_{xy}(x,y)=2, f''_{yy}(x,y)=-2$. 于是 $f''_{xx}(0,0)=-8<0, f''_{xx}(0,0)\cdot f''_{yy}(0,0)-(f''_{xy}(0,0))^2=16-4>0$. 故知 $(0,0)$ 确是函数在 D 内的极大点, 在这一点上有极大值 $f(0,0)=0$. 然而 0 并不是 D 上的最大值, 最大值出现在边界点 $(4,1)$ 上, $f(4,1)=7$.

这个函数在全平面上有两个驻点, 只是在 D 内有一个驻点. 于是自然要问: 是否存在二元可微函数, 它在全平面上只有一个驻点, 而且这驻点又是极大点, 但这一点并不是最大点? 这种函数的确是存在的, 下面的例子属于梁宗巨 [17]. 设

$$f(x,y)=8(\arctan x)^3-8(\arctan x)^2+(\arctan x)(\arctan y)-\frac{1}{8}(\arctan y)^2.$$

这个函数是初等函数, 在全平面上可微. 解方程组

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 24(\arctan x)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 16(\arctan x)\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\arctan y \\
&= 0, \qquad (1) \\
f'_y(x,y) &= (\arctan x)\cdot\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{4}(\arctan y)\cdot\frac{1}{1+y^2} \\
&= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

由 (2), $\arctan y = 4\arctan x$. 代入 (1) 后消去 $\frac{1}{1+x^2}$, 得

$$24(\arctan x)^2 - 16\arctan x + 4\arctan x = 0,$$

即

$$\arctan x(2\arctan x - 1) = 0.$$

由 $\arctan x = 0$ 得驻点 $(0,0)$. 又将 $\arctan x = \frac{1}{2}$ 代入 $\arctan y = 4\arctan x$, 得 $\arctan y = 2$, 无解. 这是因为

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}.$$

因此, $f(x,y)$ 在全平面上只有一个驻点 $(0,0)$. 为了判断它是不是极值点, 求二阶偏导数:

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}(x,y) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}[24(\arctan x)^2 - 16\arctan x + \arctan y] \\
&\quad + \frac{1}{1+x^2}\left[48(\arctan x)\frac{1}{1+x^2} - \frac{16}{1+x^2}\right], \\
f''_{xy}(x,y) &= \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}, \\
f''_{yy}(x,y) &= -\frac{2y}{(1+y^2)^2}\left(\arctan x - \frac{1}{4}\arctan y\right) + \frac{1}{1+y^2}\left[-\frac{1}{4(1+y^2)}\right].
\end{aligned}
$$

于是

$$f''_{xx}(0,0)\cdot f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = (-16)\left(-\frac{1}{4}\right) - 1 > 0,$$

又

$$f''_{xx}(0,0) = -16 < 0.$$

可知 $(0,0)$ 是极大点, $f(0,0)=0$ 是极大值. 这并不是 $f(x,y)$ 的最大值, 例如

$$f(\tan 1, \tan 1) = 8 - 8 + 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} > 0.$$

其实, 这函数的最大值是不存在的.

30. 函数 f, 它在某点的偏导数不存在, 但能在该点取得极值.

设

$$z=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

它是交于 y 轴的两个平面. 显然, 凡 $x=0$ 的点都是函数的极小点. 但是, 当 $x\geqslant 0$ 时 $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, 而当 $x<0$ 时 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$, 所以函数 z 在 $x=0$ 处的偏导数不存在.

31. 有无穷多个局部极大值而无局部极小值的函数.

设

$$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y,$$

则

$$f'_x(x,y)=-\sin x(1+e^y),\quad f'_y(x,y)=e^y\cos x-e^y(1+y).$$

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$ 得 $x=\pm n\pi, y=(-1)^n-1(n=0,1,2,\cdots)$. 对于驻点 $P_{\pm n}(\pm n\pi,(-1)^n-1)$, 有

$$\begin{aligned}&A=f''_{xx}(x,y)|_{P_{\pm n}}=(-1)^{n+1}[1+e^{(-1)^n-1}],\\&B=f''_{xy}(x,y)|_{P_{\pm n}}=0,\\&C=f''_{yy}(x,y)|_{P_{\pm n}}=-e^{(-1)^n-1}.\end{aligned}$$

当 n 为偶数时, $AC-B^2=2>0$, 又 $A=-2<0$, 故 $P_{\pm n}$ 为局部极大点, $f(\pm 2n\pi,0)=2$ 为局部极大值.

当 n 为奇数时, $AC-B^2=-(1+e^{-2})e^{-2}<0$, 故 $P_{\pm n}$ 不是局部极值点.

由此可知, 函数 f 有无穷多个局部极大点 $(\pm 2n\pi,0)(n=0,1,2,\cdots)$, 但是没有局部极小点.

32. 存在函数 f, 它在原点无局部极值, 但对任一过原点的直线, f 沿此直线上, 原点为其取得局部极小值的点.

设

$$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2),$$

则

$$f'_x(x,y)=4x-3y^2,\quad f'_y(x,y)=-6xy+4y^3.$$

令 $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, 即 $4x-3y^2=0, 2y(2y^2-3x)=0$, 得到 $x=y=0$.

对于点 $(0,0)$, 如果沿直线 $y=mx$, 则

$$f(x,y)=x^2(1-m^2x)(2-m^2x).$$

当 x 充分接近于零时, $f(x,mx)>0$, 而当 $x=0$ 时, $f(x,mx)=0$, 故沿着过点 $(0,0)$ 的每一条直线 $y=mx, f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取得极小值. 但在点 $(0,0)$ 的附近, 当 $x<y^2<2x$ 时, 将有 $f(x,y)<0$, 此即 $f(0,0)=0$ 并非函数的极小值.

33. 一个定义在区域 $D \subset R^2$ 上的一致连续函数 f, 对某个 $\varepsilon > 0$, 不存在实数 P, 使当 $|f(x) - f(y)| > P\|x - y\|$ 时, 就有

$$\|(x, f(x)) - (y, f(y))\| < \varepsilon.$$

设 f 是由 n 维欧氏空间 R^n 的子集 D 到 m 维欧氏空间 R^m 的函数. 称 f 的**陡弦是短的**, 是指对每一 $\varepsilon > 0$, 存在实数 P, 使当 $\|f(x) - f(y)\| > P\|x - y\|$ 时, 就有

$$\|(x, f(x)) - (y, f(y))\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Paine[62] 证明了, 对于定义在 R^1 的子区间上的实值函数而言, 这是一致连续性的特征. Klopfenstein 和 Telste[52] 指出, 对于高维欧氏空间, 这一命题并不成立. 他们的例子如下:

考虑 R^2 中的无限长条: $x \geqslant 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$, D 为该长条的补集. 在 D 上定义函数 f :

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ 且 } y > 1, \\ -x, & x \geqslant 0 \text{ 且 } y < -1, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

显然, f 在 D 上一致连续, 然而 f 并不满足条件 (1).

注 不难证明, 若函数 f 在 $D \subset R^n$ 上满足条件 (1), 则它在 D 上必定一致连续, 且对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $M > 0$, 当 $\|x - y\| > \varepsilon$ 时, 就有

$$\|f(x) - f(y)\| < M\|x - y\|. \tag{2}$$

Klopfenstein 和 Telste 证明了下述定理.

定理 设 f 是 R^n 的子集 D 到 R^m 内的映射, 则 f 满足条件 (1) 的充要条件是 f 在 D 上一致连续且满足条件 (2).

证 必要性已如上所述. 兹证充分性. 设 f 在 D 上一致连续, 且满足条件 (2), 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \left(0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}\right)$, 使当 $\|x - y\| < \delta$ 时, 就有

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 f 满足 (2), 故存在常数 $P > 0$, 使当 $\|f(x) - f(y)\| > \frac{\delta}{2}$ 时,

$$\|f(x) - f(y)\| < P\|x - y\|.$$

于是, 如果 $\|f(x) - f(y)\| > P\|x - y\|$, 则

$$\|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

据 δ 的选择, $\|f(x)-f(y)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此, 如果 $\|f(x)-f(y)\|>P\|x-y\|$, 那么就有

$$\begin{aligned}\|(x,f(x))-(y,f(y))\| &\leqslant \|x-y\|+\|f(x)-f(y)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 f 满足条件 (1).

注意, 若函数 f 具有有界的值域, 则它必满足条件 (2). 而 R^n 的有界子集上的一致连续函数必有界, 故此时 f 一致连续等价于条件 (1).

第八章　重积分与参变量积分

基本概念和主要结果

设 $f(x,y)$ 是定义在可求面积的有界闭区域 D 上的有界函数, 若下面 (1) 式左端的极限存在, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 此极限值称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**, 记为

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy, \tag{1}$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 是 D 上任意分划 $\Delta : D_1, D_2, \cdots, D_n$ 中 D_i 的面积, (x_i, y_i) 是 D_i 上的任意点,

$$\begin{aligned}\lambda(\Delta) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} d(D_i),\\ d(D_i) &= \sup\{\|X-Y\| : X, Y \in D_i\}.\end{aligned}$$

设 D 由下列不等式给出:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x),$$

其中 $\varphi(x), \psi(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 若 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy,$$

即此时二重积分可以化为累次积分来计算.

若连续可微函数

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

把 uv 平面上的有界闭区域 D' 一对一地映射为 xy 平面上的有界闭区域 D, 并且

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则有变量代换公式

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|dudv.$$

特别有极坐标变换公式

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

三重积分有类似的结果:

设有界闭区域 Ω 由下列不等式确定

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \quad z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y),$$

其中 $\varphi(x), \psi(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ 均为连续函数. 若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, 则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

特别地, 对于三重积分有柱坐标变换公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

和球坐标变换公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

设平面区域 D 是无界的, $\{D_n\}$ 为 D 中可求面积的任意有界闭子区域列, 并且 D 中每一点 P 从某一号码起, 属于以后一切的 D_n. 若 $f(x,y)$ 在每个 D_n 上均可积, 则称

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy \tag{2}$$

为函数 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重广义积分**. 若 (2) 式右端的极限存在且与 $\{D_n\}$ 的选择无关, 则对应的积分称为**收敛**的; 在相反的情形称为**发散**的.

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内有唯一奇点 P, 即 $f(x,y)$ 在 P 的每个邻域内无界. 对于 P 的任意 ε 邻域 U_ε, 若 $f(x,y)$ 在 $D\backslash U_\varepsilon$ 上可积, 则称

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0+} \iint\limits_{D\backslash U_\varepsilon} f(x,y)dxdy \tag{3}$$

为 D 上的无界函数 $f(x,y)$ 的**二重广义积分**. 若 (3) 式右端的极限存在且与 P 的 ε 邻域的选择无关, 则对应的积分称为**收敛**的; 在相反的情形称为**发散**的.

重积分有着与一元函数定积分类似的一系列性质, 这里不再赘述.

设二元函数 $f(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上. 若对任意固定的 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则定积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 是 y 的函数, 记作

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\quad y\in[c,d], \tag{4}$$

称 (4) 式为**含参变量 y 的定积分.**

定理 1 (连续性) 如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续, 则函数

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上连续.

定理 2 (可微性) 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上有定义, 对任一 $y\in[c,d]$, 函数 $f''(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且偏导数 $f'_y(x,y)$ 在 D 上连续, 则函数 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微, 且有

$$\varphi'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

定理 3 (积分可换序性) 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续, 则

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y): a\leqslant x<+\infty, c\leqslant y\leqslant d\}$ 上有定义, 对任意的 $y\in[c,d]$, 广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \tag{5}$$

都收敛. 于是积分 (5) 在区间 $[c,d]$ 上定义了一个函数, 记作

$$\varphi(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx,\quad y\in[c,d],$$

称它为**含参变量的广义积分.**

我们知道, 广义积分与数项级数无论在概念上还是在理论上基本是平行的. 不同的是前者是连续的, 后者是离散的. 由此自然想到, 含参变量的广义积分与函数项级数无论在概念上还是在理论上也应基本是平行的. 因此, 我们可以仿照函数项级数, 把含参变量广义积分的一致收敛概念和有关定理陈述如下:

称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上对 y **一致收敛**, 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists M \geqslant a$, 当 $A > M$ 时, 对 $\forall y \in [c,d]$, 有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Cauchy 准则 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛的充要条件是 $\forall\varepsilon > 0, \exists M \geqslant a$, 当 $A' > A > M$ 时, 对一切 $y \in [c,d]$, 有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Weierstrass 判别法 如果对充分大的 x 以及 $y \in [c,d]$,

$$|f(x,y)| \leqslant F(x),$$

且 $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

Dirichlet 判别法 如果

(i) $g(x,y)$ 关于 x 单调, 且当 $x \to +\infty$ 时, $g(x,y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致趋于 0;

(ii) 存在常数 $M > 0$, 对任意 $A > a$,

$$\left|\int_a^A f(x,y)dx\right| \leqslant M, \quad y \in [c,d],$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

Abel 判别法 如果

(i) $g(x,y)$ 关于 x 单调, 且对关于 $x \geqslant a, y \in [c,d]$ 一致有界;

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛; 则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

关于参变量积分所确定的函数

$$\varphi(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

有如下与一致收敛密切相关的性质:

如果 $f(x,y)$ 在 $x \geqslant a, c \leqslant y \leqslant d$ 上连续, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 则有

连续性 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续;

积分可换序性

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx;$$

可微性　如果 $f(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 均在 $x \geqslant a, c \leqslant y \leqslant d$ 上连续, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 存在, 而积分 $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛, 则 $\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微, 且

$$\varphi'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx, \quad y \in [c,d].$$

本章的某些反例还要用到 Lebesgue 测度的基础知识, 读者可参看 [4], [12] 或 [18].

问　　题

1. 计算积分 $\iint_D |\sin(x-y)|d\sigma$, 其中 $D: 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 2\pi$.

解　如图 8–1 所示, 将 D 分成 D_1 与 D_2. 在 D_1 上, $0 \leqslant y-x \leqslant \pi$, 故

$$|\sin(x-y)| = \sin(y-x).$$

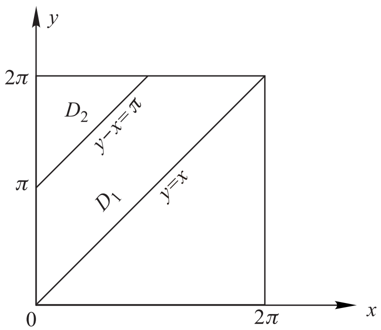

图 8–1

在 D_2 上, $\pi \leqslant y-x \leqslant 2\pi$, 故

$$|\sin(x-y)| = -\sin(y-x).$$

于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D |\sin(x-y)|d\sigma &= \iint\limits_{D_1} |\sin(x-y)|d\sigma + \iint\limits_{D_2} |\sin(x-y)|d\sigma \\ &= \iint\limits_{D_1} \sin(y-x)d\sigma - \iint\limits_{D_2} \sin(y-x)d\sigma \\ &= \int_0^{\pi} dx \int_x^{x+\pi} \sin(y-x)dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_x^{2\pi} \sin(y-x)dy \\ &\quad - \int_0^{\pi} dx \int_{x+\pi}^{2\pi} \sin(y-x)dy = 4\pi.\end{aligned}$$

2. 计算积分 $\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x+y)\mathrm{sgn}(x-y)dxdy$.

解

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}(x+y)\mathrm{sgn}(x-y)dxdy\\
=&\int_0^1 dx\int_x^1 -(x+y)dy+\int_0^1 dx\int_0^x (x+y)dy\\
=&\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx\\
=&\int_0^1\left(3x^2-x-\frac{1}{2}\right)dx=0.
\end{aligned}
$$

3. 设函数 f 与 g 都是 $[a,b]$ 上递增的连续函数, 且都不是常值函数. 证明

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx>\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$$

证

$$
\begin{aligned}
S&=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^b g(y)dy\int_a^b f(x)dx\\
&=\int_a^b dy\int_a^b f(x)g(x)dx-\int_a^b dy\int_a^b f(x)g(y)dx\\
&=\int_a^b\int_a^b f(x)[g(x)-g(y)]dxdy.
\end{aligned}
$$

交换 x 与 y 的位置得

$$S=\int_a^b\int_a^b f(y)[g(y)-g(x)]dxdy.$$

所以

$$2S=\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy.$$

因 f 与 g 都是递增的连续函数, 故

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0.$$

又因为 f 与 g 都不是常值函数, 所以

$$\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dxdy>0,$$

即 $S>0$, 从而

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx>\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$$

4. 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续且恒大于零. 证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2.$$

证 因为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx &= \int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy\\ &= \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}d\sigma = \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}d\sigma,\end{aligned}$$

其中 $D: a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$, 所以

$$\begin{aligned}2\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx &= \iint\limits_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy + \iint\limits_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy\\ &= \iint\limits_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy \geqslant \iint\limits_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}dxdy\\ &= 2(b-a)^2,\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2.$$

5. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} e^{f(x)-f(y)}dxdy \geqslant (b-a)^2.$$

证 由于对任意实数 u, 皆有

$$e^u \geqslant 1+u,$$

因而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} e^{f(x)-f(y)}dxdy &\geqslant \iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} [1+f(x)-f(y)]dxdy\\ &= (b-a)^2 + \iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} f(x)dxdy - \iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} f(y)dxdy\\ &= (b-a)^2.\end{aligned}$$

注 本题也可由上题的结果直接推出.

6. 证明函数方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv$$

至多有一个在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续的解.

证 (反证法) 设在 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上有两个连续的解 h_1 与 h_2. 令 $h=h_1-h_2$, 则 h 必满足齐次方程

$$h(x,y)=\int_0^x\int_0^y h(u,v)dudv. \tag{1}$$

任取 $p(0<p<1)$, 令 $M_p=\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant p\\ 0\leqslant y\leqslant p}} h(x,y)$, 则由 h 的连续性及 (1) 式得到

$$M_p=h(x_p,y_p)\leqslant M_p x_p y_p\leqslant M_p p^2.$$

于是, 对于使得 $0<p<1$ 的所有 p 有 $M_p\leqslant 0$. 因 h 连续, 故对于 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$, 有 $h(x,y)\leqslant 0$. 用一个对称的讨论, 有 $h(x,y)\geqslant 0$. 由此可见, $h(x,y)=0$, 故 $h_1=h_2$.

7. 设 f 在区间 $[0,1]$ 上具有连续的导数,

$$\varepsilon_n=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right).$$

求 $\lim_{n\to\infty} n\varepsilon_n$.

解

$$\begin{aligned}\varepsilon_n&=\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\\&=\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right]dx\\&=-\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(\int_x^{\frac{i}{n}} f'(t)dt\right)dx.\end{aligned}$$

交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}\varepsilon_n&=-\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(t)dt\int_{\frac{i-1}{n}}^{t} dx\\&=-\sum_{i=1}^n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(t-\frac{i-1}{n}\right)f'(t)dt.\end{aligned}$$

在上述积分中, 函数 $\left(t-\frac{i-1}{n}\right)$ 不变号, 因而由积分中值定理知有 $\xi_i, \frac{i-1}{n}\leqslant\xi_i\leqslant\frac{i}{n}$, 使

$$\begin{aligned}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(t-\frac{i-1}{n}\right)f'(t)dt&=f'(\xi_i)\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\left(t-\frac{i-1}{n}\right)dt\\&=f'(\xi_i)\frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

于是, $n\varepsilon_n = -n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\frac{1}{n}$. 因 f' 在 $[0,1]$ 上连续, 当然可积, 因而有

$$\lim_{n\to\infty} n\varepsilon_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$$

8. 设 $I = \iiint_\Omega (x+y-z+10)dv$, 其中 Ω 是球体: $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$. 证明

$$28\sqrt{3}\pi \leqslant I \leqslant 52\sqrt{3}\pi.$$

证 令 $f(x,y,z) = x+y-z+10$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 均不为零, 故 f 的极值必定出现在 Ω 的边界上, 换言之, 需求 f 在曲面 $x^2+y^2+z^2=3$ 上的条件极值, 设

$$F(x,y,z) = (x+y-z+10) + \lambda(x^2+y^2+z^2-3),$$

并令 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$, 得

$$1+2\lambda x = 0, \quad 1+2\lambda y = 0, \quad -1+2\lambda z = 0,$$

故 $x = -\frac{1}{2\lambda}, y = -\frac{1}{2\lambda}, z = \frac{1}{2\lambda}$. 代入方程 $x^2+y^2+z^2=3$, 得到 $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = -1, \\ z_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1, \\ z_2 = -1. \end{cases}$$

显然, $f(-1,-1,1) = 7$ 是最小值, $f(1,1,-1) = 13$ 是最大值, 从而

$$7 \leqslant f(x,y,z) \leqslant 13.$$

另一方面, 球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$ 的体积为 $V = 4\sqrt{3}\pi$, 故

$$7\cdot 4\sqrt{3}\pi \leqslant \iiint_\Omega f(x,y,z)dv \leqslant 13\cdot 4\sqrt{3}\pi,$$

即

$$28\sqrt{3}\pi \leqslant I \leqslant 52\sqrt{3}\pi.$$

9. 设 $a>0, b>0$. 证明

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

证 作代换 $x = \frac{1}{a}r\cos\theta, y = \frac{1}{b}r\sin\theta$, 积分限 r 从 0 到 $+\infty, \theta$ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2)dxdy &= \frac{1}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} f(r^2)rdr \\ &= \frac{\pi}{4ab}\int_0^{+\infty} f(r^2)dr^2 = \frac{\pi}{4ab}\int_0^{+\infty} f(x)dx.\end{aligned}$$

10. 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

解 设区域 $D_R: x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant R^2$, 则有

$$I_R = \iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} rdr = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$

因为

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to+\infty} I_R = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

11. 讨论广义积分 $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$ 的收敛性, 其中 $\alpha > 0, D: x^2+y^2 \leqslant R^2$.

解 用极坐标, 得

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^R \frac{r}{r^\alpha}dr = 2\pi \lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^R \frac{1}{r^{\alpha-1}}dr.$$

当 $0<\alpha<2$ 时, $\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = \frac{R^{2-\alpha}}{2-\alpha}$.

当 $\alpha \geqslant 2$ 时, $\lim_{\varepsilon\to0+}\int_\varepsilon^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}} = \infty$.

故原广义积分当 $0<\alpha<2$ 时收敛, 当 $\alpha \geqslant 2$ 时发散.

12. 能否找出一个 α 值, 使广义积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$$

收敛?

解 用极坐标, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{\rho}{\rho^\alpha}d\rho = 2\pi\int_0^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}} \\ &= 2\pi\left(\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}} + \int_1^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}}\right).\end{aligned}$$

为使广义积分 I 收敛, 必须 $\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}}$ 都收敛. 第一个积分收敛的充要条件为 $\alpha-1<1$, 而第二个积分收敛的充要条件为 $\alpha-1>1$. 因这两种条件不可能同时成立, 故无论 α 为何值, 所给的广义积分都不收敛.

13. 设函数 $f(u)$ 具有连续的导函数, 求

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz.$$

解　应用球坐标, 则得

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz\\&=\int_0^t dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(r)r^2\sin\theta d\theta\\&=4\pi\int_0^t r^2f(r)dr.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\lim_{t\to 0}\frac{4}{t^4}\int_0^t r^2f(r)dr\\&=\lim_{t\to 0}\frac{4}{4t^3}t^2f(t)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}.\end{aligned}$$

如果 $f(0)=0$, 则所求极限为 $f'(0)$; 如果 $f(0)\neq 0$, 则极限为 ∞.

14. 证明

$$\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\|y|\leqslant R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi.$$

证　记

$$I_R=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant R\\|y|\leqslant R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

$$I'_R=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

则有

$$I'_R\leqslant I_R\leqslant I'_{2R}.$$

注意

$$\begin{aligned}I'_R&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3e^{-r^2}dr=\pi\int_0^{R^2}te^{-t}dt\\&=\pi(1-e^{-R}-R^2e^{-R})\to\pi\quad(R\to+\infty),\end{aligned}$$

故命题得证.

15. 设函数 f 在闭区间 $[a,A]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a).$$

证 因 f 在 $[a,A]$ 上连续, 故 f 在 $[a,A]$ 上存在原函数 F. 于是

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt\\=&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)]\\=&\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}\\=&F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).\end{aligned}$$

16. 计算积分 $\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$.

解 设 $I(a)=\int_0^\pi\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$. 当 $|a|<1$ 时, 因

$$1-2a\cos x+a^2\geqslant1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0,$$

故 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且有连续的导数, 从而可在积分号下求导数, 将 $I(a)$ 对 a 求导数, 得

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^\pi\frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}dx\\&=\frac{1}{a}\int_0^\pi\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)dx\\&=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^\pi\frac{dx}{(1+a^2)-2a\cos x}\\&=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\left(\dfrac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x}\\&=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\cdot\frac{\pi}{2}=0.\end{aligned}$$

于是, 当 $|a|<1$ 时, $I(a)=C$ (常数). 但 $I(0)=0$, 故 $C=0$, 从而 $I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时, 令 $b=\frac{1}{a}$, 则 $|b|<1$, 并有 $I(b)=0$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_0^\pi\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)dx\\&=I(b)-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.\end{aligned}$$

当 $|a|=1$ 时,

$$\begin{aligned}I(1)&=\int_0^\pi\left(\ln4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)dx=2\pi\ln2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt\\&=2\pi\ln2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)=0.\end{aligned}$$

同理可求得 $I(-1)=0$.

综上所述, 得到

$$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx=\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1.\end{cases}$$

17. 研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性, 其中 f 是闭区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数.

解 当 $y\neq 0$ 时, 被积函数是连续的, 因此, F 在 $y\neq 0$ 处是连续的.

又, $F(0)=0$. 现考察 $y>0$, 并设 m 为 f 在 $[0,1]$ 上的最小值, 则 $m>0$. 由于

$$F(y)\geqslant m\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx=m\arctan\frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y\to 0+}\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2},$$

因而

$$\lim_{y\to 0+}F(y)\geqslant \frac{m\pi}{2}>0,$$

可见 F 在 $y=0$ 处不连续.

18. 设 $\varphi(t)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}dx$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 求 $\varphi'(0)$.

解 因 $\ln\sqrt{x^2+t^2}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2}=\frac{t}{x^2+t^2}$ 在 $(0,0)$ 处不连续, 故不能用积分号下对 t 求导数的方法来求 $\varphi'(0)$, 而应如下求出 $\varphi'(0)$:

$$\begin{aligned}\varphi(0)&=\int_0^1 \ln x dx=-1,\\ \varphi(t)&=\ln\sqrt{1+t^2}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+t^2}dx\\ &=\ln\sqrt{1+t^2}+\int_0^1\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}-1\\ &=\ln\sqrt{1+t^2}-1+t\arctan\frac{1}{t},\ \text{当 } t>0 \text{ 时}.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\frac{1}{t}\ln\sqrt{1+t^2}+\arctan\frac{1}{t}\to\frac{\pi}{2}\quad(t\to 0+),$$

即 $\varphi'(0)=\frac{\pi}{2}$.

19. 研究积分 $I(a)=\int_0^1 \frac{\sin ax}{\sqrt{|x-a|}}dx$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 令

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^a \frac{\sin ax}{\sqrt{|x-a|}}dx + \int_a^1 \frac{\sin ax}{\sqrt{|x-a|}}dx \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

考察两个积分:

$$
\int_a^{a+\eta} \frac{|\sin ax|}{\sqrt{x-a}}dx \quad (0 \leqslant a \leqslant 1-\eta) \quad \text{及} \quad \int_a^1 \frac{|\sin ax|}{\sqrt{x-a}}dx \quad (1-\eta \leqslant a \leqslant 1).
$$

做代换 $y = x - a$, 则这两个积分分别化为

$$
\int_0^\eta \frac{|\sin a(a+y)|}{\sqrt{y}}dy \quad (0 \leqslant a \leqslant 1-\eta)
$$

及

$$
\int_0^{1-a} \frac{|\sin a(a+y)|}{\sqrt{y}}dy \quad (1-\eta \leqslant a \leqslant 1).
$$

这两个含参变量的积分均以积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}dy$ 为优积分, 故 I_2 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

类似地, 第一项积分也一致收敛.

综上所述, 原积分在 $[0,1]$ 上一致收敛.

20. 应用积分号下的积分法, 求下列积分:

$$
I = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx \quad (b > a > 0).
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx \int_a^b x^y dy \\
&= \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx.
\end{aligned}
$$

这里, 当 $x = 0$ 时, $\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 理解为零, 从而 $\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant y \leqslant b$ 上连续, 故可交换积分次序.

做代换 $x = e^{-t}$, 可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx &= \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t}\sin t dt \\
&= \frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t - \cos t]e^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1+(1+y)^2}.
\end{aligned}
$$

于是, 得到

$$I=\int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2}=\arctan(1+y)\Big|_a^b$$
$$=\arctan(1+b)-\arctan(1+a).$$

21. 证明: 积分

$$I=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

(i) 在任何区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上一致收敛; (ii) 在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上不一致收敛.

证　当 $\alpha=0$ 时, $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=0$; 当 $\alpha>0$ 时, $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=1$. 因此, 积分 I 对每一定值 $\alpha\geqslant 0$ 是收敛的.

(i) 如果 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$, 则因

$$0<\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=e^{-\alpha A}\leqslant e^{-aA},$$

故对任给 $\varepsilon>0$, 存在不依赖于 α 的数 $A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$, 使当 $A>A_0$ 时就有

$$\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx<e^{-aA_0}=\varepsilon.$$

于是, 积分 I 在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上一致收敛.

(ii) 如果 $0\leqslant\alpha\leqslant b$, 则不存在这样的数 A_0. 事实上, 取 $0<\varepsilon<1$ 就办不到. 由于当 $\alpha\to 0+$ 时, $e^{-\alpha A}\to 1$, 故对于足够小的 α 值, $e^{-\alpha A}$ 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大. 因此, 在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上, 积分 I 对 α 的收敛就不是一致的.

22. 证明: 积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

(i) 在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛; (ii) 在含 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a,b]$ 上不一致收敛.

证　不失一般性, 我们只考虑 α 的正值.

(i) 由于积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$$

是收敛的, 故对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在数 A_0, 使当 $A>A_0$ 时, 便有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon.$$

当 $\alpha>0$ 时, 由于

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz,$$

故取 $A > \frac{A_0}{a}$, 对 $\alpha \geqslant a > 0$, 就有

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx\right| < \varepsilon.$$

于是, 在区间 $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上, 积分 I 是一致收敛的.

(ii) 对于任意的正数 A, 当 $\alpha \to 0+$ 时,

$$\begin{aligned}\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx &= \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \\ &\to \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

因此, 当 $\alpha > 0$ 且充分小时, 就有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx > \frac{\pi}{4},$$

故积分 I 在区间 $0 \leqslant \alpha \leqslant b$ $(b > 0)$ 上不一致收敛.

23. 设 (i) f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; (ii) $\varphi(x, y)$ 在 $a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 上有界; (iii) 对每一固定的 y $(\alpha \leqslant y \leqslant \beta), \varphi(x, y)$ 是 x 的单调连续函数. 证明积分

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x, y)dx$$

在 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 上一致收敛.

证 据条件 (i), 存在 $A > 0$, 当 $A_1, A_2 \geqslant A$ 时, 就有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

任取 $y \in [\alpha, \beta]$, 由 $\varphi(x, y)$ 对 x 的单调性以及 $f(x)$ 的连续性, 应用积分第二中值定理, 有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\varphi(x, y)dx\right| \leqslant \left|\varphi(A_1, y)\int_{A_1}^{\xi} f(x)dx\right| + \left|\varphi(A_2, y)\int_{\xi}^{A_2} f(x)dx\right| \quad (A_1 \leqslant \xi \leqslant A_2). \tag{1}$$

又, $\varphi(x, y)$ 在 $a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 上有界, 故有 M 使得对任意 $a \leqslant x < +\infty, \alpha \leqslant y \leqslant \beta$, 有

$$|\varphi(x, y)| \leqslant M.$$

于是由 (1) 可知, 对任意 $y \in [\alpha, \beta]$, 都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\varphi(x, y)dx\right| \leqslant 2M\varepsilon.$$

因此, 积分 I 在 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ 上一致收敛.

24. 设 $I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$, 其中 $0\leqslant a\leqslant b$. (i) 证明 $I(a)$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛; (ii) 求 $I(a)$ 及 $I(0)$ 的值.

证 (i) 因 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}e^{-ax}=1$, 故 $x=0$ 不是奇点. 由于

$$\left|\int_0^A \sin x dx\right|=|1-\cos A|\leqslant 2,$$

且当 $0\leqslant a\leqslant b$ 时, $\frac{e^{-ax}}{x}$ 在 $x>0$ 时关于 x 递减, 又由于 $0<\frac{e^{-ax}}{x}<\frac{1}{x}$ $(0\leqslant a\leqslant b)$, 故 $\frac{e^{-ax}}{x}$ 关于 a $(0\leqslant a\leqslant b)$ 一致地趋于 0. 于是, 由 Dirichlet 判别法知积分

$$I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$$

在 $[0,b]$ 上一致收敛.

(ii) 因被积函数 $\frac{e^{-ax}\sin x}{x}$ 及其对 a 的偏导数在 $x\geqslant 0$ 时是连续的, 又

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right)dx&=-\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x dx\\&=-\frac{1}{a^2+1},\end{aligned}$$

且因 $|e^{-a_0x}\sin x|\leqslant e^{-a_0x}$, 而 $\int_0^{+\infty}e^{-a_0x}dx$ $(a_0>0)$ 收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x dx$ 当 $a\geqslant a_0>0$ 时一致收敛. 因此, 当 $a\geqslant a_0$ 时可在积分号下求导数:

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right)dx=-\frac{1}{a^2+1}.$$

由 $a_0>0$ 的任意性可知上式对一切 $a>0$ 都成立. 两端对 a 积分得

$$I(a)=-\int\frac{da}{a^2+1}=-\arctan a+C\quad(a>0).$$

因 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1$, 故

$$|I(a)|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}\quad(a>0),$$

所以

$$\lim_{a\to+\infty}I(a)=0,$$

即

$$\lim_{a\to+\infty}(-\arctan a+C)=-\frac{\pi}{2}+C=0,$$

因而 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是, $I(a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$.

前面已经证明, $I(a)$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛, 故 $I(a)$ 是 $[0,b]$ 上的连续函数, 因此,

$$\lim_{a\to 0}I(a)=I(0),$$

即

$$I(0)=\lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan a\right)=\frac{\pi}{2}.$$

25. 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha>0,\beta>0).$$

解 设 $\alpha<\beta$, 显然有

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy.$$

注意到当 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 时, $0<xe^{-yx^2}\leqslant xe^{-\alpha x^2}$, 而广义积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx$ 收敛, 因而参变量积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx$ 关于 y 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 又因 xe^{-yx^2} 在 $0\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 上连续, 故可交换积分次序. 因而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx&=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy\\&=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2y}dy=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

26. 设函数 f 在任意有界区间上可积, 并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$. 证明:

$$\lim_{\sigma\to 0+}\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}f(x)dx=\alpha. \tag{1}$$

证 据条件, 存在正数 L 与 A_0, 当 $x\geqslant A_0$ 时, $|f(x)|\leqslant L$. 由于

$$\left|\int_0^{A_0}e^{-\sigma x}f(x)dx\right|\leqslant\int_0^{A_0}|f(x)|dx,$$

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\sigma x}f(x)dx\right|\leqslant L\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\sigma x}dx,$$

故 (1) 式右端的积分收敛.

任给 $\varepsilon>0$, 存在正数 A, 当 $x\geqslant A$ 时,

$$|f(x)-\alpha|<\varepsilon.$$

又因 $\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}dx=1$, 故

$$\begin{aligned}\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}f(x)dx-\alpha&=\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}[f(x)-\alpha]dx\\&=\sigma\left(\int_0^A+\int_A^{+\infty}\right)e^{-\sigma x}[f(x)-\alpha]dx.\end{aligned}\tag{2}$$

对 (2) 式第二项积分, 估值如下:

$$\begin{aligned}\left|\sigma\int_A^{+\infty}e^{-\sigma x}[f(x)-\alpha]dx\right| &< \varepsilon\sigma\int_A^{+\infty}e^{-\sigma x}dx\\ &< \varepsilon\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}dx=\varepsilon.\end{aligned}\tag{3}$$

不失一般性, 设只有一个奇点 $x=0$. 可以选取 $\eta>0$, 使得

$$\int_0^{\eta}|f(x)|dx<\varepsilon.$$

由于 f 在 $[\eta,A]$ 上常义可积, 故有界, 即存在常数 M, 使得

$$|f(x)|\leqslant M\quad(\eta\leqslant x\leqslant A).$$

现在可对 (2) 式中的第一项积分估值:

$$\begin{aligned}\left|\sigma\int_0^{A}e^{-\sigma x}[f(x)-\alpha]dx\right| &\leqslant \sigma\int_0^{A}e^{-\sigma x}|f(x)|dx+\sigma\int_0^{A}e^{-\sigma x}|\alpha|dx\\ &\leqslant \sigma\left[\int_0^{\eta}e^{-\sigma x}|f(x)|dx+\int_\eta^{A}e^{-\sigma x}|f(x)|dx\right]+|\alpha|(1-e^{-\sigma A})\\ &< \sigma\varepsilon+M(e^{-\sigma\eta}-e^{-\sigma A})+|\alpha|(1-e^{-\sigma A}).\end{aligned}\tag{4}$$

由 (3), (4) 两式可知存在 $\delta>0$, 使当 $\sigma<\delta$ 时, 就有

$$\left|\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}[f(x)-\alpha]dx\right|<4\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{\sigma\to0+}\sigma\int_0^{+\infty}e^{-\sigma x}f(x)dx=\alpha.$$

27. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间 $[\delta,R]$ 上可积, 且 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛. 证明:

$$\lim_{y\to0+}\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

证　因 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, e^{-xy} 关于 x 单调且关于 x,y 一致有界, 故由 Abel 判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}f(x)dx$$

关于 $y\geqslant0$ 一致收敛. 因此, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<A<+\infty$, 使对任意 $y\geqslant0$, 有

$$\left|\int_0^{\delta}e^{-xy}f(x)dx\right|<\varepsilon,\quad\left|\int_A^{+\infty}e^{-xy}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

对此固定的 $\delta>0, A>0$, 因 f 在 $[\delta, A]$ 上可积, 故可设 $|f(x)|\leqslant M$. 又当 $x\in[\delta, A]$ 时,

$$0\leqslant 1-e^{-xy}\leqslant xy\leqslant Ay\to 0\quad (y\to 0+),$$

故存在 $\delta_1>0$, 当 $0<y<\delta_1$ 时,

$$\begin{aligned}
&0\leqslant 1-e^{-xy}<\frac{\varepsilon}{MA}\quad (x\in[\delta, A]),\\
&\left|\int_0^{+\infty} f(x)dx-\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)dx\right|\\
&\qquad\leqslant\left|\int_\delta^A (1-e^{-xy})f(x)dx\right|+\left|\int_0^\delta f(x)dx\right|+\left|\int_0^\delta e^{-xy}f(x)dx\right|\\
&\qquad\quad+\left|\int_A^{+\infty} f(x)dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} e^{-xy}f(x)dx\right|<\varepsilon+4\varepsilon=5\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{y\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)dx=\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

28. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续有界. 令

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}dt\quad (y>0).$$

证明 (i) 对任意 x, I 绝对收敛.

(ii) $\lim_{y\to 0+}\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt=f(x)$.

证 (i) 设 $|f(x)|\leqslant M$, 因

$$\left|\frac{yf(t+x)}{t^2+y^2}\right|\leqslant\frac{yM}{t^2+y^2},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{t^2+y^2}dt$ 收敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(t+x)}{t^2+y^2}dt$ 绝对收敛. 而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(t+x)}{t^2+y^2}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(t)}{(x-t)^2+y^2}dt,$$

故对任意 x, I 都绝对收敛.

(ii) 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 由于

$$\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(x_0-t)^2+y^2}=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}=1,$$

故有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x_0-t)^2+y^2}dt-f(x_0)\right|&=\frac{y}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)-f(x_0)}{(x_0-t)^2+y^2}dt\right|\\
&\leqslant\frac{y}{\pi}\left(\int_{x_0+\sqrt{y}}^{+\infty}+\int_{x_0-\sqrt{y}}^{x_0+\sqrt{y}}+\int_{-\infty}^{x_0-\sqrt{y}}\right)\frac{|f(t)-f(x_0)|}{(x_0-t)^2+y^2}dt\\
&=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

对任给的 $\varepsilon>0$, 因 f 连续, 故有 $\delta>0$, 使当 $|t|<\delta$ 时,

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因而当 $\sqrt{y}<\eta=\min\left\{\frac{\delta}{2},\frac{\varepsilon\pi}{2M}\right\}$ 时, 便有

$$I_2=\frac{y}{\pi}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t^2+y^2}dt<\varepsilon.$$

对于 I_1, 我们有

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\frac{2My}{\pi}\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}\leqslant\frac{2My}{\pi}\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\\&=\frac{2M\sqrt{y}}{\pi}<\varepsilon.\end{aligned}$$

对于 I_3 也有类似的估计式. 因此, 当 $0<y<\eta^2$ 时,

$$\left|\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x_0-t)^2+y^2}dt-f(x_0)\right|<3\varepsilon.$$

由于 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 是任取的, 故

$$\lim_{y\to0+}\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+y^2}dt=f(x).$$

29. 设 f 是区间 $[0,A]$ $(A>0)$ 上的单调函数. 证明

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(0+).$$

证　不妨设 f 递增, 则

$$\lim_{x\to0+}f(x)=f(0+).$$

因此对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使

$$0\leqslant f(\delta)-f(0+)<\varepsilon.$$

我们注意

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

于是由积分第二中值定理, 得到

$$\begin{aligned}\left|\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}dx-\frac{\pi}{2}f(0+)\right|&=\left|\int_0^A[f(x)-f(0+)]\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\\&=\left|\left(\int_0^\delta+\int_\delta^A\right)[f(x)-f(0+)]\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\\&\leqslant[f(\delta)-f(0+)]\left|\int_{\xi_1}^\delta\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\\&\quad+[f(A)-f(0+)]\left|\int_{\xi_2}^A\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\\&\leqslant\varepsilon\left|\int_{\alpha\xi_1}^{\alpha\delta}\frac{\sin x}{x}dx\right|+[f(A)-f(0+)]\left|\int_{\alpha\xi_2}^{\alpha A}\frac{\sin x}{x}dx\right|,\end{aligned}$$

其中 $\xi_1\in[0,\delta],\xi_2\in[\delta,A]$. 由 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛, 可知连续函数

$$g(u)=\int_0^u\frac{\sin x}{x}dx$$

在 $[0,+\infty)$ 上有界, 设 $|g(u)|\leqslant M$. 又由 Cauchy 准则, 存在 n_0, 当 $A''>A'\geqslant n_0$ 时,

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{x}dx\right|<\varepsilon.$$

这样一来, 当 $\alpha\geqslant\frac{n_0}{\delta}$ 时, 便有

$$\left|\int_0^A[f(x)-f(0+)]\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|\leqslant 2M\varepsilon+[f(A)-f(0+)]\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^A f(x)\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}f(0+).$$

30. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上绝对可积. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nxdx=0.$$

证 因 f 在 $(0,+\infty)$ 上绝对可积, 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得

$$\int_A^{+\infty}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是

$$\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nxdx\right|\leqslant\left|\int_0^A f(x)\sin nxdx\right|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

先设 f 在 $(0,A]$ 中无奇点. 在 $(0,A]$ 中插入分点

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=A,$$

并设 f 在 $[t_{k-1},t_k]$ 上的下确界为 m_k, 则有

$$\begin{aligned}\int_0^A f(x)\sin nxdx&=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\sin nxdx\\&=\sum_{k=1}^m\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(x)-m_k]\sin nxdx+\sum_{k=1}^m m_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin nxdx,\end{aligned}$$

从而又有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^A f(x)\sin nxdx\right|&\leqslant\sum_{k=1}^m\omega_k\Delta t_k+\sum_{k=1}^m|m_k|\frac{|\cos nt_{k-1}-\cos nt_k|}{n}\\&\leqslant\sum_{k=1}^m\omega_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|,\end{aligned}$$

其中 ω_k 为 f 在 $[t_{k-1},t_k]$ 上的振幅, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

由于 f 在 $(0,A]$ 上可积, 故可取某一分划, 使得

$$\left|\sum_{k=1}^m\omega_k\Delta t_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样的固定分划, $\sum_{k=1}^m|m_k|$ 为一定值, 因而存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 恒有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 对上述所选取的 n_0, 当 $n>n_0$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nxdx\right|&\leqslant\left|\int_0^A f(x)\sin nxdx\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nxdx\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^m\omega_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^m|m_k|+\int_A^{+\infty}|f(x)|dx\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nxdx=0.$$

其次, 设 f 在 $(0,A]$ 中有奇点. 为简便起见, 不妨设只有一个奇点, 且为 $x=0$. 于是, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$\int_0^\eta|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 f 在 $[\eta, A]$ 上无奇点, 故应用上述结果可知存在 n_0, 使当 $n > n_0$ 时, 恒有

$$\left|\int_\eta^A f(x)\sin nx dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx dx\right| &\leqslant \int_0^\eta |f(x)|dx + \left|\int_\eta^A f(x)\sin nx dx\right| + \int_A^{+\infty} |f(x)|dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx dx = 0,$$

31. 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数. 证明极限 $\lim_{\alpha\to 0}\{\int_0^1 [f(x)]^\alpha dx\}^{\frac{1}{\alpha}}$ 存在 ([22], 1974, p. 171–172).

证 令 $F(\alpha) = \int_0^1 [f(x)]^\alpha dx$, 我们将要证明

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln F(\alpha)}{\alpha} = \int_0^1 \ln f(x)dx,$$

从而由指数函数的连续性可知

$$\lim_{\alpha\to 0}[F(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$$

因 f 在 $[0,1]$ 上正值且连续, 故存在常数 m, M, 使

$$0 < m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

因此, 对任意 $a > 0$, 函数 $[f(x)]^\alpha$ 和 $[f(x)]^\alpha \ln f(x)$ 在矩形区域

$$D = \{(x,\alpha) : 0 \leqslant x \leqslant 1, -a \leqslant \alpha \leqslant a\}$$

上都是连续的, 从而 F 在 $\alpha = 0$ 可微, 且可积分号下求导数. 令 $G(\alpha) = \ln F(\alpha)$, 则 $F(0) = 1, G(0) = 0$, 且

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\frac{G(\alpha)}{\alpha} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha} = G'(0) \\ &= \frac{F'(0)}{F(0)} = \int_0^1 \ln f(x)dx.\end{aligned}$$

反　例

1. 两个累次积分存在而不相等的函数.

设

$$f(x,y)=\begin{cases} y^{-2}, & 0<x<y<1, \\ -x^{-2}, & 0<y<x<1, \\ 0, & [0,1]\times[0,1] \text{ 中的其他的点}. \end{cases}$$

对于 $0<y<1$, 有

$$\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^y \frac{dx}{y^2}-\int_y^1 \frac{dx}{x^2}=1,$$

因而

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=1.$$

同样地, 对于 $0<x<1$, 有

$$\int_0^1 f(x,y)dy=-\int_0^x \frac{dy}{x^2}+\int_x^1 \frac{dy}{y^2}=-1,$$

因而

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=-1.$$

可见

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx.$$

2. 两个累次积分存在且相等, 但二重积分不存在的函数.

设 x 为一有理数, 则可把它表作 $\frac{p_x}{q_x}$, 其中 p_x 与 q_x 是互素的整数且 $q_x>0$. 今在正方形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & (x,y) \text{ 为有理点且 } q_x=q_y, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

我们先证 f 在 D 上的两个累次积分均存在且相等.

事实上, 对固定的 $y\in[0,1]$. 当 y 为无理数时, $\varphi(x)=f(x,y)\equiv 0$, 从而

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

而当 y 为有理数时, y 可表作 $\frac{p}{q}$, 而分母等于 q 的有理数不超过 q 个, 所以至多在 q 个点上, $f(x,y)=1$; 而在其他的点上, $f(x,y)=0$. 由此可见, $\varphi(x)=f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 且

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

总之, 对任一 $y \in [0,1]$, 恒有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0,$$

从而

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

同理可证

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = 0.$$

为证 f 在 D 上的二重积分不存在, 我们只要证明 f 在 D 上无处连续即可. 为此, 令

$$G = \{(x,y) : (x,y) \text{ 为 } D \text{ 中的有理点且 } q_x = q_y\}.$$

易证, G 在 D 内稠密, 即 D 中任一开矩形 $(a,b)\times(c,d)$ 都含有 G 的点, 这里 $0 \leqslant a < b \leqslant 1, 0 \leqslant c < d \leqslant 1$. 事实上, 对 x 轴上的区间 $[0,1]$ 做等分: 2 等分, 3 等分, $\cdots$, n 等分 $\cdots$, 依正整数列做下去, 则必存在正整数 N_1, 使

$$\frac{1}{N_1} < b - a.$$

于是, 当 $n > N_1$ 时, 对任一 n 等分, 必有一个分点落在 (a,b) 之中. 设此分点为 $\frac{m_n}{n}$, 即有点集 $\{\frac{m_n}{n} : n = N_1, N_1+1, \cdots\}$ 包含于 (a,b) 之中.

同理, 存在正整数 N_2, 使 $\frac{1}{N_2} < d - c$, 当 $n > N_2$ 时必有落在 (c,d) 内的分点 $\frac{r_n}{n}$. 于是, $\{\frac{r_n}{n} : n = N_2, N_2+1, \cdots\}$ 构成 (c,d) 的子集.

取 $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$, 则有

$$\left\{\frac{m_n}{n} : n = n_0, n_0+1, \cdots\right\} \subset (a,b),$$
$$\left\{\frac{r_n}{n} : n = n_0, n_0+1, \cdots\right\} \subset (c,d).$$

由于素数是无穷多的, 所以在 n_0 之后的正整数中必有素数 q, 而 $\frac{m_q}{q}, \frac{r_q}{q}$ 皆为不可约分式, 它们分别落在 (a,b) 与 (c,d) 之中, 亦即

$$\left(\frac{m_q}{q}, \frac{r_q}{q}\right) \in (a,b)\times(c,d).$$

因此, G 在 D 中稠密.

若 $(x,y) \in G$, 则 $f(x,y) = 1$. 由于 (x,y) 的任一邻域都含有 $D\backslash G$ 的点, 在这种点上, 函数值等于零, 所以 f 在 G 上处处不连续.

若 $(x,y) \in D\backslash G$, 则 $f(x,y) = 0$. 由于 G 在 D 内稠密, 所以 (x,y) 的任一邻域都含有 G 的点, 在这种点上, 函数值等于 1, 因而 f 在 $D\backslash G$ 上也处处不连续.

总之, 我们已经证明了 f 在 D 上无处连续, 从而 f 在 D 上并不可积.

这个例子是由 Pringsneim[67] 做出的.

3. 二重积分存在而两个累次积分都不存在的函数.

设 x 为一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 分母表示为 q_x. 今在正方形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & x \text{ 和 } y \text{ 都是有理数},\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

兹证 f 在 D 上是可积的. 为此, 我们先来证明 f 在 D 中任一无理点处连续, 而在其余点处间断.

事实上, 设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一无理点, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 只有有限个小于或等于 $\frac{2}{\varepsilon}$ 的正整数. 因此, 使得 $\frac{1}{q_x}\geqslant\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{q_y}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 $x=\frac{p_x}{q_x},y=\frac{p_y}{q_y}$ 只有有限个. 于是, 存在 x_0 (注意, x_0 是无理数!) 的 δ-邻域, 使得适合不等式 $\frac{1}{q_x}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 x 全在 δ-邻域之外. 同样, 由于 y_0 也是无理数, 故存在 y_0 的 ξ-邻域, 使得适合不等式 $\frac{1}{q_y}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 y 全在 ξ-邻域之外. 因此, 存在 (x_0,y_0) 的一个 η-邻域, 在这个邻域中, 若 (x,y) 为有理点, 则 $\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}<\varepsilon$; 若 (x,y) 不是有理点, 则 $f(x,y)=0$; 而在 (x_0,y_0) 处, $f(x_0,y_0)=0$. 由此可知, 当点 (x,y) 落在 (x_0,y_0) 的 η-邻域时, 就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

于是, f 在 D 中无理点上的连续性得以证明.

设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一有理点, 则

$$f(x_0,y_0)=\frac{1}{q_{x_0}}+\frac{1}{q_{y_0}}=r>0\quad(r\text{ 为一定数}).$$

因为 (x_0,y_0) 的任一 δ-邻域中都含有无理点 (x,y), 在这种点上 $f(x,y)=0$, 所以当取 $\varepsilon(0<\varepsilon<r)$ 时, 就无法使

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

成立. 因此, f 在 D 中的有理点上不连续.

设 (x_0,y_0) 为 D 中任一其余的点, 即 x_0,y_0 不全为有理数, 也不全为无理数. 不妨设 x_0 为有理数而 y_0 为无理数, 此时 $f(x_0,y_0)=0$. 在 (x_0,y_0) 的任一 δ-邻域中都有有理点 (x_0,y), 在这种点上, 有

$$f(x_0,y)=\frac{1}{q_{x_0}}+\frac{1}{q_y}>\frac{1}{q_{x_0}}>0.$$

于是, 当取 $\varepsilon\ (0<\varepsilon<\frac{1}{q_{x_0}})$ 时, 就无法使

$$|f(x_0,y_0)-f(x_0,y)|<\varepsilon$$

成立. 因此, f 在 (x_0, y_0) 处不连续.

现设 I 为 $D=[0,1]\times[0,1]$ 中的全体无理点所成之集, 而 I_1 与 I_2 分别为 x 轴上的区间 $[0,1]$ 与 y 轴上的区间 $[0,1]$ 中的全体无理点, 则有

$$I = I_1 \times I_2.$$

因 $mI = mI_1 \times mI_2 = 1$, 故 $m(D\backslash I)=0$, 可见 f 在 D 上的不连续点所成之集其测度为零. 又, f 在 D 上有界. 因此, f 在 D 上是可积的.

最后, 我们证明 f 在 D 上的两个累次积分都不存在, 从而不能把 f 在 D 上的二重积分化为累次积分来计算.

我们任意固定 $y\in[0,1]$, 当 y 为有理数时, q_y 为一确定的正整数, 且有

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & x \text{ 为有理数},\\[2mm] 0, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

易见, $\varphi(x)=f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而 φ 在 $[0,1]$ 上不可积, 也就根本谈不上 f 在 D 上的累次积分. 对于固定的 $x\in[0,1]$, 也有同样的结果.

注 我们有如下的命题: 设 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的函数, 如果 (i) 二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

存在, (ii) 对每一 $x\in[a,b]$, 单积分

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

也存在, 那么累次积分

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

同样存在且等式

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

成立.

本章反例 2 与反例 3 表明了命题中的条件 (i) 与 (ii) 是互相独立的.

4. 二重积分不存在, 而只有一个累次积分存在的函数.

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 2y, & x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

于是, 对任一 $x \in [0,1]$, 恒有

$$\int_0^1 f(x,y)dy = 1,$$

从而

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = 1.$$

但是, 对于固定的 $y \neq \frac{1}{2}$, 函数 $\varphi(x) = f(x,y)$ 在区间 $[0,1]$ 上无处连续, 因而 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上并不可积, 故累次积分

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$$

不存在.

又, 不难看出, 当 $y \neq \frac{1}{2}$ 且 x 为无理数时, f 在点 $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ 不连续, 而这种点的全体所成之集其测度为 1, 因而 f 在 $[0,1] \times [0,1]$ 上并不可积.

5. 二重积分存在，但只有一个累次积分存在的函数.

若 x 为一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 分母表示为 q_x. 在 $D = [0,1] \times [0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_x}, & (x,y) \text{ 为有理点}, \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases}$$

易见, f 在 D 上的不连续点只有可数个, 因而 f 在 D 上可积, 且

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 0.$$

对任意 $y \in [0,1]$, 若 y 为无理数, 则 $\varphi(x) = f(x,y) \equiv 0$, 从而

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

若 y 为有理数, 则

$$\varphi(x) = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_x}, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

此时也有

$$\int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

总之, 对任何 $y \in [0,1]$ 都有 $\int_0^1 f(x,y)dx = 0$, 所以得到

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = 0.$$

另一方面, 当 $x_0 \in [0,1]$ 且 x_0 为有理数时,

$$\psi(y) = f(x_0, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_{x_0}}, & y \text{ 为有理数}, \\ 0, & y \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

由于 $\psi(y)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而它在 $[0,1]$ 上不可积, 故累次积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$$

也就不存在.

6. 一个发散的广义二重积分, 它的两个累次积分都存在.

第一例 考虑广义二重积分

$$\iint\limits_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy,$$

这里, $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. 令 $K(\varepsilon, \varepsilon')$ 是图 8–2 所示的闭集合, 它是由 D_1, D_2 两个部分组成. 计算累次积分, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right\} dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} \right) dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y} + \frac{y}{(x+y)^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

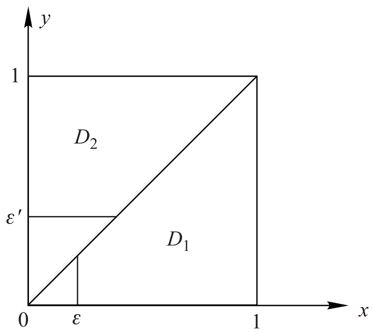

图 8–2

类似地可得

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right\} dx = \frac{1}{2}.$$

另一方面,

$$\iint\limits_{K(\varepsilon,\varepsilon')} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \iint\limits_{D_1} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy,$$

而

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy &= \int_\varepsilon^1 dx \int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}dy \\ &= \int_\varepsilon^1 \left[-\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{4x}dx = -\frac{1}{4}\ln\varepsilon; \\ \iint\limits_{D_2} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy &= \int_{\varepsilon'}^1 dy \int_0^y \frac{x-y}{(x+y)^3}dx = \frac{1}{4}\ln\varepsilon'.\end{aligned}$$

因此

$$\iint\limits_{K(\varepsilon,\varepsilon')} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy = \frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

如果 $\varepsilon=\varepsilon'$, 当 $\varepsilon\to 0+$ 时, 则 $K(\varepsilon,\varepsilon')$ 收敛于 D, 且二重积分的极限值为 0; 如果 $\varepsilon'=2\varepsilon$, 当 $\varepsilon\to 0+$ 时, $K(\varepsilon,2\varepsilon)$ 收敛于 D, 且二重积分的极限值为 $\frac{\ln 2}{4}$. 因此, 广义二重积分

$$\iint\limits_{D} \frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$$

发散.

第二例　在 $D=[1,+\infty)\times[1,+\infty)$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

则

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} dx\int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy &= \int_1^{+\infty}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)_{y=1}^{y=+\infty} dx \\ &= -\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}, \\ \int_1^{+\infty} dy\int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx &= \int_1^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

可见 f 在 D 上的两个累次积分都收敛.

其次证明广义二重积分

$$\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

发散. 为此, 令 $D_1=\{(x,y):1\leqslant x\leqslant b,1\leqslant y\leqslant b\}$, 当 $b\to+\infty$ 时, D_1 趋于 D. 此时

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\iint\limits_{D_1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b dx\int_1^b\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\\&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left(\frac{b}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\&=\lim_{b\to+\infty}\left(2\arctan 1-\arctan\frac{1}{b}-\arctan b\right)=0.\end{aligned}$$

然后再令 $D_2=\{(x,y):1\leqslant x\leqslant 2b,1\leqslant y\leqslant b\}$, 当 $b\to+\infty$ 时, D_2 趋于 D. 此时

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty}\iint\limits_{D_2}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy&=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{2b}\left(\frac{b}{b^2+x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\&=\lim_{b\to+\infty}\left(\arctan 2-\arctan 2b-\arctan\frac{1}{b}+\arctan 1\right)\\&=\arctan 2-\frac{\pi}{4}\neq 0.\end{aligned}$$

可见积分

$$\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

发散.

7. 广义二重积分 $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$ 存在, 且对每一 $x\in[0,1]$, 积分 $\int_0^1 f(x,y)dy$ 存在, 但累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$ 不存在的函数 f.

在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}2^n, & x=\dfrac{2m-1}{2^n},\ 且\ 0<y\leqslant\dfrac{1}{2^n}\quad(n=1,2,\cdots;m=1,2,\cdots,2^{n-1}).\\0, & 其他情形.\end{cases}$$

对任意 $\varepsilon>0$, 在矩形 $[0,1]\times[\varepsilon,1]$ 上, 函数 f 只在有限个直线段上 (即满足 $\frac{1}{2^n}\geqslant\varepsilon$ 的直线段 $x=\frac{2m-1}{2^n}$ 上) 异于 0, 故

$$\iint\limits_{[0,1]\times[\varepsilon,1]} f(x,y)dxdy=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 就得到

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy=0.$$

另一方面, 任取 $x \in [0,1]$, 若 $x \neq \frac{2m-1}{2^n}$, 则 $f(x,y) \equiv 0$, 从而

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 0.$$

若 $x = \frac{2m-1}{2^n}$, 则

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^{\frac{1}{2^n}} f(x,y)dy = 1.$$

因此, 对每一 $x \in [0,1]$, 积分

$$\int_0^1 f(x,y)dy$$

存在. 由于形如 $\frac{2m-1}{2^n}$ 的点的全体在 $[0,1]$ 内是稠密的, 所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而累次积分

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$$

不存在.

注　对于常义二重积分, 我们有如下的命题: 设 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上的函数, 如果

(i) 二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 存在;

(ii) 对每一 $x \in [a,b]$, 单积分

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

也存在. 那么累次积分

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

必定存在, 且等式

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

成立. 上述反例说明了对于广义二重积分而言, 相应的命题并不成立.

8. 函数 $f(x)$ 与 $g(y)$, 它们分别在 $0 \leqslant x < +\infty$ 与 $0 \leqslant y < +\infty$ 上广义可积, 但 $f(x)g(y)$ 在 $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ 上并不广义可积.

在 $I_1 = [0,+\infty)$ 上定义函数

$$f(x) = \frac{\sin x}{n}, \quad 2(n-1)\pi \leqslant x < 2n\pi \quad (n = 1,2,\cdots);$$

又在 $I_2 = [0,+\infty)$ 上定义函数

$$g(y) = \frac{\sin y}{n}, \quad 2(n-1)\pi \leqslant y < 2n\pi \quad (n = 1,2,\cdots).$$

并令

$$h(x,y)=f(x)g(y),\quad (x,y)\in I_1\times I_2.$$

易见, $f(x)$ 与 $g(y)$ 分别在 I_1 与 I_2 上是广义可积的, 且其积分值为 0.

兹证 $h(x,y)$ 在 $I_1\times I_2$ 上并不广义可积.

事实上, 如果 $h(x,y)$ 在 $I_1\times I_2$ 上是广义可积的, 那么, 由于广义二重积分是一种绝对收敛积分, 这有别于广义一重积分 (参看 [43], p. 223–225), 因而 $|h(x,y)|$ 在 $I_1\times I_2$ 上也应当是广义可积的. 然而

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_0^{2n\pi}\int_0^{2m\pi}|h(x,y)|dxdy&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\left(\lim_{m\to\infty}\int_0^{2m\pi}|g(y)|dy\right)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{|\sin y|}{k}dy\right)dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{4}{k}\right)dx=+\infty.\end{aligned}$$

因此, $|h(x,y)|$ 在 $I_1\times I_2$ 上并不广义可积, 从而 $h(x,y)$ 在 $I_1\times I_2$ 上也不广义可积.

9. 一个间断函数 f, 使 $\varphi(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ 是连续函数.

设 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$, 并令

$$\varphi(y)=\int_0^1 f(x,y)dx.$$

因积分区间为 $0\leqslant x\leqslant 1$, 故当 $y<0$ 时, $f(x,y)=1$; 而当 $0<y<1$ 时.

$$f(x,y)=\begin{cases}-1, & x<y,\\ 0, & x=y,\\ 1, & x>y;\end{cases}$$

当 $y=1$ 时,

$$f(x,y)=\begin{cases}-1, & x<1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$$

当 $y>1$ 时, $f(x,y)=-1$. 因此, 当 $y\leqslant 0$ 时,

$$\varphi(y)=\int_0^1 1dx=1;$$

当 $0<y<1$ 时,

$$\begin{aligned}\varphi(y)&=\int_0^y f(x,y)dx+\int_y^1 f(x,y)dx\\&=\int_0^y(-1)dx+\int_y^1 1dx=1-2y;\end{aligned}$$

当 $y \geqslant 1$ 时,

$$\varphi(y)=\int_0^1(-1)dx=-1.$$

合并以上结果得

$$\varphi(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant 0,\\ 1-2y, & 0<y<1,\\ -1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

易见, φ 是连续函数.

10. 存在函数 f, 使 $\varphi(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ 是间断函数.

设 $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, 则

$$\varphi(y)=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}dx=\arctan\frac{1}{y},$$

故

$$\varphi(0+)=\lim_{y\to 0+}\varphi(y)=\frac{\pi}{2}.$$

又 $\varphi(0)=0$, 可见 φ 在 $y=0$ 处是间断的.

注　若 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\varphi(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在 $[c,d]$ 上连续. 反例 10 说明了在这个命题中, f 在 D 上连续的条件是不能去掉的. 本章反例 9 则说明了这个条件也不是必要的.

11. 不能积分号下求导数的参变量积分.

设 $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 并令

$$\varphi(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

在积分号下求导数, 就得到

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}dx=\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}dx=0.$$

另一方面, 我们有

$$\varphi(0)=\int_0^1\ln x dx=-1.$$

又当 $y\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}\varphi(y)&=\left[x\ln\sqrt{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}dx\\&=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+y\arctan\frac{1}{y},\end{aligned}$$

所以

$$\varphi'(0+) = \lim_{y\to 0+}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{y} = \lim_{y\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+y\arctan\frac{1}{y}}{y} = \frac{\pi}{2}.$$

同理可得 $\varphi'(0-) = -\frac{\pi}{2}$. 由此可见, 不能用积分号下求导数的方法来计算 $\varphi'(0)$.

注 若 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义并且是连续的, 又 f_y' 在 D 上也连续, 则当 $c<y<d$ 时, Leibniz 公式

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f_y'(x,y)dx$$

为真. 上述反例中的函数 $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处不连续, 这说明了 f 在 D 上连续的条件是不能去掉的.

12. 存在连续函数 f, 使 $\varphi(y)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dx$ 是间断函数.

在 $D=[0,+\infty)\times[-2,2]$ 上定义函数 f:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(1-y^2)x}{x}, & x\neq 0.\\ 1-y^2, & x=0.\end{cases}$$

易见, f 在 D 上连续. 考察积分

$$\varphi(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-y^2)x}{x}dx.$$

当 $|y|=1$ 时, $\varphi(y)=0$. 当 $|y|<1$ 时, 做变换 $t=(1-y^2)x$, 则

$$\varphi(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

当 $|y|>1$ 时, 做变换 $t=-(1-y^2)x$, 则

$$\varphi(y)=\int_0^{+\infty}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)dt=-\frac{\pi}{2}.$$

故 $\varphi(y)$ 在 $y=\pm 1$ 处不连续.

注 若 f 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 是 y 在区间 $[c,d]$ 上的连续函数. 上述反例说明了在这个命题中, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛的条件是不能去掉的.

13. 不能在积分号下求导数的广义参变量积分.

考察积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx.$$

当 $\alpha=0$ 时, $I(\alpha)=0$; 当 $\alpha>0$ 时, 令 $\alpha x=y$, 则

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2};$$

而当 $\alpha<0$ 时, 令 $\alpha x=-y$, 则

$$I(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}dy=-\frac{\pi}{2}.$$

由此可见, 当 $\alpha\neq 0$ 时 $I'(\alpha)=0$. 又 $I'(0)$ 不存在.

另一方面, 当 $\alpha\neq 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x dx$$

不存在, 故不能用积分号下求导数的方法来计算 $I'(\alpha)$.

注　有如下的 Leibniz 法则: 设 $f(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 都在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 存在, $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ 关于 y 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛, 则 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上可导, 且

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx.$$

上述反例说明了在 Leibniz 法则中, 积分 $\int_a^{+\infty}f'_y(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛的条件不可去掉.

14. 一个一致收敛的参变量积分, 不能以与参数无关的收敛积分为优函数.

所谓存在着与参数无关的收敛积分作为被积函数 $f(x,y)$ 的**优函数**, 是指存在着函数 $\varphi(x)$, 使对一切 y, 不等式

$$|f(x,y)|\leqslant\varphi(x)$$

恒成立且积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛.

今考虑积分

$$I=\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx\quad(0<y<1).$$

我们先来证明积分 I 是一致收敛的. 为此, 做变换 $t=\frac{1}{y}$, 则

$$I=\int_1^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx\quad(1<t<+\infty).$$

我们只要证明对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在着与 $t(1 < t < +\infty)$ 无关的正数 M, 可使

$$\int_M^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx < \varepsilon.$$

为了这一目的, 我们再做变换 $u = t(x-t)$, 则

$$\int_M^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx = \frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

现分三种情形来讨论.

(i) 设 $1 < t < \frac{M}{2}$, 则因 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ 收敛, 故存在正数 M_1, 当 $M > M_1$ 时, 有

$$\frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du < \int_{\frac{M}{2}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon.$$

(ii) 设 $\frac{M}{2} \leqslant t \leqslant M$, 则存在正数 M_2, 当 $M > M_2$ 时, 就有

$$\frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \frac{2}{M}\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon.$$

(iii) 设 $t > M$, 则当 $M > M_2$ 时, 就有

$$\frac{1}{t}\int_{t(M-t)}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{M} < \varepsilon.$$

因此, 当 $M > \max\{M_1, M_2\}$ 时, 可使

$$\int_M^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx < \varepsilon.$$

即所论积分对 y 是一致收敛的.

另一方面, 不存在 $e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}$ 的优函数 $\varphi(x)$. 事实上, 若取 $y = \frac{1}{x}$, 亦即 $x - \frac{1}{y} = 0$, 则由

$$\left|e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\right| \leqslant \varphi(x)$$

得到 $\varphi(x) \geqslant 1$, 因而积分 $\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx$ 发散. 于是不能用优函数的方法来证明积分 I 的一致收敛性.

15. 一个曲面, 它的内接多面体的面积不收敛于它的面积.

下面的例子属于 Schwarz[73].

考虑一个半径为 1, 高为 1 的正圆柱面 S. 我们按下列方式在 S 内做内接多面体: 在圆柱面 S 上做 n 个等距间隔 (相距为 $\frac{1}{n}$) 的圆周. 将每一圆周分为 m 段相等的圆弧, 并使每一圆弧的端点与上下相邻圆周上圆弧的中点对齐.

考虑由下列三角形组成的多面体, 这些三角形的两个顶点就是上述圆弧的两个端点, 而其第三个顶点是上面 (或下面) 相邻圆周上与此圆弧中点对齐的端点.

这些三角形构成一个内接于 S 的多面体 P_{mn}, 这个多面体由 $2mn$ 个三角形组成, 每个三角形的面积为

$$\sin\frac{\pi}{m}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

因而 P_{mn} 的面积等于

$$\begin{aligned}A(P_{mn})&=2mn\sin\frac{\pi}{m}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=2mn\sin\frac{\pi}{m}\left[\frac{1}{n^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2m}\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

现在, 令 m 及 n 趋向无穷大, 则多面体 P_{mn} “趋向 S”. 首先我们注意到

$$\lim_{m,n\to\infty}\inf A(P_{mn})\geqslant 2\pi,$$

这是因为

$$2mn\sin\frac{\pi}{m}\left(\frac{1}{n^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant 2mn\sin\frac{\pi}{m}\cdot\frac{1}{n}=2m\sin\frac{\pi}{m}$$

及

$$\lim_{m\to\infty}2m\sin\frac{\pi}{m}=2\pi.$$

其次, 我们来证明, 确实有

$$\lim_{m,n\to\infty}\inf A(P_{mn})=2\pi.$$

为此, 令 $m=n$, 则

$$A(P_{mn})=2n^2\sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{n^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}\right]^{\frac{1}{2}},$$

所以

$$\lim_{m,n\to\infty}A(P_{mn})=2\pi.$$

但若选取与 m 相比足够大的 n, 则我们可以得到任意大于 2π 的极限. 事实上, 若选取 $n=m^3$, 就得到极限 $+\infty$. 这是因为

$$A(P_{mm^3})=2m^4\sin\frac{\pi}{m}\left[\frac{1}{m^6}+4\sin^4\frac{\pi}{2m}\right]^{\frac{1}{2}}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}A(P_{mm^3})=+\infty.$$

注　上面的例子告诉我们, 与曲线弧长相类似的定义对定义曲面的面积是不适用的.

参 考 文 献

[1] 冯平道: Rolle 定理的一个证明, 宁夏大学学报 (自然科学版), 1987 年第 2 期 69–70.

[2] 孙本旺、汪浩主编: 数学分析中的典型例题和解题方法, 湖南科学技术出版社, 1981.

[3] 朱永庚: Rolle 定理的一个新证明, 陕西师范大学学报 (自然科学版), 1980—1981 年合刊, 54–55.

[4] 江泽坚、吴智泉合编: 实变函数论, 人民教育出版社, 1961.

[5] 江泽坚、吴智泉、周光亚: 数学分析, 人民教育出版社, 1965.

[6] 陈传璋、金福临等合编: 数学分析 (第 2 版), 上海科学技术出版社, 1962.

[7] 刘秋生: 正项级数判敛性的一个方法, 数学通报, 1964 年第 3 期, 39–40.

[8] 邹承祖、刘隆复等编: 数学分析习题课讲义, 吉林大学出版社, 1986.

[9] 汪林: 实分析中的反例, 高等教育出版社, 1989.

[10] 李继闵: 周期函数的和、差、积、商的周期性, 数学通报, 1965 年第 5 期, 40–41.

[11] 郑格于: 再论周期函数的最小正周期, 数学通报, 1963 年第 12 期, 35–36.

[12] 郑维行、王声望: 实变函数与泛函分析概要, 人民教育出版社, 1980.

[13] 周肇锡: 对 "正项级数判敛的一个方法" 一文的补充, 数学通报, 1964 年第 11 期, 35–36.

[14] 宣立新: 对两个周期函数之和的周期性的一点看法, 南京师范大学学报 (自然科学版), 1984 年第 2 期, 37–42.

[15] 柳孟辉: 一个简单的不可微分的连续函数, 数学学报, 4(1954), 479–481.

[16] 赵根榕、熊必璠: 导数的介值定理的几种证明, 数学通报, 1982 年第 2 期, 34–38.

[17] 梁宗巨: 多元函数的最大值与最小值, 数学通报, 1965 年第 10 期, 41–45.

[18] 夏道行、吴卓人、严绍宗编著: 实变函数论与泛函分析概要, 上海科学技术出版社, 1963.

[19] 颜怀曾: 周期函数的最小正周期, 数学通报, 1963 年第 6 期, 44–45.

[20] Abian A: A ultimate proof of Rolle theorem, Amer Math Monthly, 86(1979), 484–485.

[21] Akerberg, B: A proof of the arithmetic-geometric mean ineguality, Amer Math Monthly, 70(1963), 997–998.

[22] American Mathematical Monthly, 1950–1987.

[23] Anderson, D. R, Kay, D. C: Commuting maps lacking commuting extensions, Amer Math Monthly, 74(1967), 183–184.

[24] Andresen, E: Non-differentiable functions |f|, Amer Math Monthly, 75(1968), 688–689.

[25] Benedetto, J. J: Real variable and integration with historical notes, 1976.

[26] Bernau, S. J: The bounds of a continuous function, Amer Math Monthly, 74(1967), 1082.

[27] Bhakta, P. C: On the differentiability of a certain function, Indian, J. Mech Math, 3(1965), 82–83.

[28] Blair, C. E: Null sequences and convergent series, Amer Math Monthly, 84(1977), 655.

[29] Bôcher, M: Annals of Math, 4(1904), 159.

[30] Botsko, M. W: A unified trestment of various theorems in elementary analysis, Amer Math Monthly, 94(1987), 450–452.

[31] Burr, J: Discontinuous function with partial derivatives everywhere, Amer Math Monthly, 67(1960), 813–814.

[32] Cantor, G: Math Annalen, 21(1883), 590.

[33] Chu. S. C, Moyer. R D: On continuous and fixed points, Fund Math, 59(1966) 91–95.

[34] David, P: A note on symmetrically continuous functions, Caspis Pěst Mat, 96(1971), 262–264.

[35] Davies, R. O, Weinman, A: Problem 5502, Amer Math Monthly, 74(1967), 727.

[36] De Marr: Research problems extension of commuting mappings, Bull Amer Math SOC4, 70(1964), 500–501.

[37] Denniston, R. H. F: Periodic functions having incommensurable periodic, Amer Math Monthly 64(1957), 598–599.

[38] Diananda, P. H: A simple proof of the arithmetic mean, geometric mean, Amer Math Monthly, 67(1960), 1007.

[39] Elyash, E. S, Laush, G. L, Levine, N: On the product of two uniformly continuous functions on the line, Amer Math Monthly, 67(1960), 265–267.

[40] Evans, J. P: Sequences generated by use of the mean value theorem, Amer Math Monthly, 68(1961), 365.

[41] Faber, G: Über stetige Funktionen, Math Annglen, 69(1910), 372–443.

[42] Freimer, M: Note on a convergence problem, Amer Math Monthly, 62(1955), 645.

[43] Фихтенгольц, Г. М: 微积分学教程, 第三卷第一分册, 高等教育出版社, 1957.

[44] Gerald, F: Increasing continuous singular functions, Amer Math Monthly, 80(1973), 918–919.

[45] Gould, S. H: A convergent series whose partial sums have distinct real roots, Amer Math Monthly, 61(1954), 355–356.

[46] Hardy, G. H: Pure mathematics, Londan, 1963.

[47] Hillam, B. P: A characterization of the convergence of successive approximations, Amer Math Monthly, 83(1976), 273.

[48] Jacobson, B: On the mean value theorem for integrals, Amer Math Monthly, 89(1982), 300–301.

[49] Katznelson, Y, Stromberg, K: Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions, Amer Math Monthly, 81(1974), 349–354.

[50] Kelman, R. B, Rivlin, T. J: Conditions for the integrand of an inproper integral to be bounded or tend to zero, Amer Math Monthly, 67(1960), 1019–1022.

[51] Klambauer, G: 数学分析, 上海科学技术出版社, 1981.

[52] Klopfenstein, K. F, Telste, J: Visualizing uniform continuity of functions of several variables, Amer Math Monthly, 81(1974), 623–625.

[53] Knight, W: On Q→Q differenti able functions, Amer Math Monthly, 82(1975), 415–416.

[54] Knopp, K: J reine angew Math, 142(1913), 292–293.

[55] Kong-Ming Chong: An inductive proof of the A. M-G. M. inequality, Amer Math Monthly, 83(1976), 369.

[56] Kristensen, E: Functions which are discontinuous at every rational point, Nordisk Mat. Ti dskr, 16(1968), 150–156.

[57] Marcus, S: Nondifferentiability of inverse of a continuous modulus of continuity, Amer Math Monthly, 72(1965), 1139.

[58] Moran, D. A: For a collection of examples and counterexamples, Amer Math Monthly, 68(1961), 508–509.

[59] Neculce, N: The "weakening" of Cauchy's convergence criterion, Amer Math Monthly, 68(1961), 880–885.

[60] Osgood, W. F: Non-uniform convergence and the integration of series term by term, Amer J. Math, 19(1987), 155–190.

[61] Owens, P. J: Absolutely convergent Cauchy products, Amer Math Monthly, 75(1968), 687.

[62] Paine, D: Visualizing uniform continuity, Amer Math Monthly, 75(1968), 44–45.

[63] Pamankutty, P. Vamanamurthy, M: Limit of the composite of two function, Amer Math Monthly, 82(1975), 63–64.

[64] Pennington, W. B: Existence of a maximum of a continuous function, Amer Math Monthly, 67(1960), 892–893.

[65] Posey, E. E, Vaughan, J. E: Functions with a proper local maximum in each interval, Amer Math Monthly, 90(1983), 281–282.

[66] Pringsheim, A: Encyclopadie der Math, Wissensch II A, 22.

[67] Pringsheim: A Sitzungsberichte d. Münch, Akad, 28(1898), 71.

[68] Rey Pastor, J: Elementos de la teoria de functiones 3d. ed Ibero-Americana, Madrid-Buenos, 1953.

[69] Richmond, D. E: Anelementary proof of a theormin calculus, Amer Math Monthly, 92(1985), 589–590.

[70] Samelson, H: On Rolle's theorem, Amer Math Monthly, 86(1979), 486.

[71] Scheeffer: Math Annalen, 35(1890), 542.

[72] Schneider, H: Nonuniform convergence, Amer Math Monthly 65(1958), 35.

[73] Schwarz, A: Gesammelte mathematische abhandlungen, 2(1890), 309.

[74] Shidfar, A: On the continuity of van der Waerden's function in the Hölder sense, Amer Math Monthly, 93(1986), 375–376.

[75] Sierpiński, W: Bull. Internat. Ac Sciences Cracove, 1911, 149.

[76] Smart, D. R: When does $T^{n+1}x - T^n x \to 0$ imply convergence? Amer Math Monthly, 87(1980), 748–749.

[77] Snow, W: Discontinuity in a function with all partial derivatives, Amer Math Monthly, 80(1973), 565.

[78] White, B: One-one continuous mapping $R \to R$, Amer Math Monthly, 83(1976), 206.

[79] Wilansky, A: Topology for analysis, 1970.

[80] Young, W. H: Proc Lond Math 2(1903), 94.

[81] Young, W. H. Young, G. C: Quarterly Journal of Math, 61(1910) 87.